ISSN 2073-6673

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РАН

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ и ПРИКЛАДНАЯ ГИДРОФИЗИКА

Том 4
№ 1
2011

Санкт-Петербург
"Наука"

УДК 577.31

© *Е.В. Романенко, С.Г. Пушков*, 2011
[1]Институт проблем экологии и эволюции им. А.Н. Северцова РАН, Москва
[2]Летно-исследовательский институт им. М.М. Громова Минавиапрома, Жуковский
evromanenko33@mail.ru

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КРЫЛА ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ДВИЖЕНИИ

С использованием приближенных выражений для составляющих гидродинамических сил через коэффициенты аэродинамических производных первого порядка и кинематических параметров движения построена математическая модель работы плоского жесткого крыла различного удлинения при больших амплитудах линейных и угловых колебаний, а также различных положениях оси вращения крыла. Получены формулы для вычисления тяги, мощности и кпд в случае гармонических колебаний крыла. Показано хорошее согласие результатов расчета по полученным формулам с соответствующими известными численными решениями.

Ключевые слова: крыло, тяга, мощность, кпд, аэродинамические производные, математическая модель.

В теории нестационарной аэро-гидродинамики крыла краевые задачи, как правило, сводят к решению интегральных уравнений, которые далее решаются либо численными методами (чаще всего) либо аналитическими (в некоторых частных случаях) [1–6]. В книгах С.М. Белоцерковского [7] и Д.Н. Горелова [8] изложены численные методы решения сингулярных интегральных уравнений теории крыла.

Возможности аналитических методов весьма ограничены. Они разработаны достаточно подробно лишь для бесконечных крыльев (плоская задача) в линейной постановке. Для крыльев конечного размаха есть решения, касающиеся только весьма малых удлинений, в случаях очень малых и очень больших значений числа Струхаля.

Важно отметить, что все решения даже в нелинейной постановке задачи не в полной мере описывают особенности обтекания крыла, формирования вихревого следа при нестационарном движении. Таким образом, при достаточно большой сложности используемых методов расчета решения для аэро-гидродинамических характеристик крыла тем не менее в каждом конкретном случае являются лишь некоторым приближением. Одновременно имеющиеся частные решения задачи порой проблематично применить для расчетов в конкретных случаях кинематики движения крыла определенной формы.

Вместе с тем целый ряд прикладных задач, касающихся гидроплавания и полета летательных аппаратов, требуют разработки инженерных методов расчета, позволяющих достаточно точно оценить силовые и моментные характеристики крыла в рассматриваемом случае движения при доступных алгоритмах расчета. Такая задача была поставлена, прежде всего, в интересах изучения вопросов гидробионики, гидродинамики плавания дельфинов и рыб, оценки пропульсивных характеристик крыльевых движителей.

В основу решения задачи были положены модели разделения гидродинамических сил на циркуляционные и инерционные составляющие, а также линейные выражения для гидродинамических характеристик крыла с использованием коэффициентов аэродинамических производных [6]. Такой подход к решению задачи представляется перспективным, поскольку имеется достаточно обширная база данных по коэффициентам аэродинамических производных крыла различной формы, полученная численными методами в линейной постановке задачи, и появляется возможность получить относительно простые расчетные формулы для оценки гидродинамических сил и кпд, развиваемых жестким плоским крылом в несжимаемой жидкости.

Некоторые основные положения и результаты решения наиболее полно представляются в настоящей работе.

Рассмотрим решение плоской (двухмерной) малоамплитудной задачи о неустановившемся движении тонкого профиля, которое было изложено, в частности, в работах А.И. Некрасова [1] и Л.И. Седова [2]. В случае малых колебаний профиля относительно некоторого основного движения авторами были получены выражения для гидродинамических сил, допускающие простое физическое толкование.

Пусть имеется тонкое крыло, движущееся в безграничном объеме жидкости, покоящейся на бесконечности, и движение крыла можно представить в виде основного движения со скоростью U_0 и наложенного на него добавочного движения с малыми перемещениями и скоростями. При рассмотрении движения крыла в подвижной системе координат $X0Y$, движущейся со скоростью U_0, полагалось, что при колебаниях с задней кромки профиля сходит линия разрыва скоростей или вихревая пелена и на задней кромке выполняется условие Чаплыгина–Жуковского о конечности скорости. При этом в работах [1, 2] были получены следующие интегральные уравнения для подъемной силы Y, нормальной к линии профиля, и подсасывающей силы X, направленной вдоль линии профиля:

$$\begin{gathered} Y=-m^*\frac{dv_n}{dt}-\rho\pi bU_0\left(v_n-b\omega_z/4\right)-\rho\frac{b}{2}U_0\int\limits_{b/2}^{\infty}\frac{\gamma(\xi,t)\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-(b/2)^2}}, \\ X=\rho\pi b\left(v_n+(1/2\pi)\int\limits_{b/2}^{\infty}\frac{\gamma(\xi,t)\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-(b/2)^2}}\right)^2. \end{gathered} \tag{1}$$

где $m^*=\rho\pi(b/2)^2$ – присоединенная масса профиля, $b/2$ – половина хорды, v_n – нормальная скорость в центре профиля, $\omega_z=d\vartheta/dt$ – угловая скорость, $\vartheta(t)$ – угол наклона крыла к горизонтальной оси, $\gamma(\xi,\ t)$ – вихревая интенсивность в следе на расстоянии ξ от центра крыла, ρ – плотность среды.

Несложными преобразованиями выражения (1) можно представить в виде

$$\begin{gathered} Y=-m^*\frac{dv_n}{dt}-\rho U_0\Gamma, \\ X=m^*v_n\omega_z+\rho v_n\Gamma-\rho\pi bu_*\left(v_n-u_*\right). \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь величину $\Gamma=\pi b\left(v_n-\dfrac{b\omega_z}{4}-u_*\right)$, можно рассматривать как присоединенную циркуляцию, а $u_*=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{b/2}^{\infty}\frac{\gamma(\xi,t)\,d\xi}{\sqrt{\xi^2-(b/2)^2}}$ как некоторую эффективную вызванную скорость, обусловленную наличием за крылом вихревой пелены.

Теперь рассмотрим задачу о неустановившемся движении крыла конечного размаха (рис. 1) в постановке, аналогичной постановке в плоской задаче. При этом пусть форма крыла в плане будет симметрична относительно центральной линии $0Z$. Будем полагать, что в случае неустановившегося движения крыла конечного размаха влияние следа на гидродинамические характеристики крыла можно, так же как в плоской задаче, учесть введением некоторой эффективной индуцируемой скорости. При этом будем считать применимым метод плоских сечений и допускать справедливость соотношений, аналогичных (1) [9, 10]:

$$
\begin{aligned}
Y &= -m^* \frac{dv_n}{dt} - \rho U_0 \int_{-l}^{l} \Gamma(z)\,dz, \\
X &= m^* v_n \omega_z + \rho v_n \int_{-l}^{l} \Gamma(z)\,dz - X_i,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где m^* – присоединенная масса крыла; $X_i = \rho\pi \int_{-1}^{l} b(z)\, f_*(z)\left(v_n - f_*(z)\right) dz$ – индуктивное «сопротивление»; f_* – некоторая эффективная скорость, индуцируемая вихревой пеленой, остающейся в следе; v_n – нормальная скорость крыла в точках оси симметрии крыла $0Z$; $b(z)$ – хорда крыла в сечении $z = \text{const}$; l – полуразмах крыла.

Так как v_n не зависит от z, для X_i можно сделать оценку «сверху» [9, 10]:

$$
X_i \le \rho\pi S \frac{v_n^2}{4}, \tag{4}
$$

где S – площадь крыла.

До сих пор мы рассматривали случай малоамплитудных колебаний бесконечного крыла и крыла конечного размаха. Теперь перейдем к случаю больших амплитуд.

Рассмотрим движение крыла конечного размаха в неограниченном объеме жидкости. Пусть форма крыла в плане является симметричной относительно оси $0Z$ в системе координат $0XYZ$, движущейся с постоянной скоростью U_0 в направлении $0X$. Движение крыла задается законом колебаний $y = y(t)$, $\alpha = \alpha(t)$ и $\vartheta = \vartheta(t)$ (рис. 1), y – линейные колебания крыла, ϑ – угол наклона крыла к плоскости $0XY$, α – угол атаки. Будем допускать, что при больших амплитудах поперечных и угловых колебаний мгновенные значения угла атаки являются малыми величинами и характер обтекания крыла безотрывным.

Тогда, исходя из физических закономерностей, для составляющих гидродинамических сил в рассматриваемом случае будут справедливы соотношения, аналогичные (3):

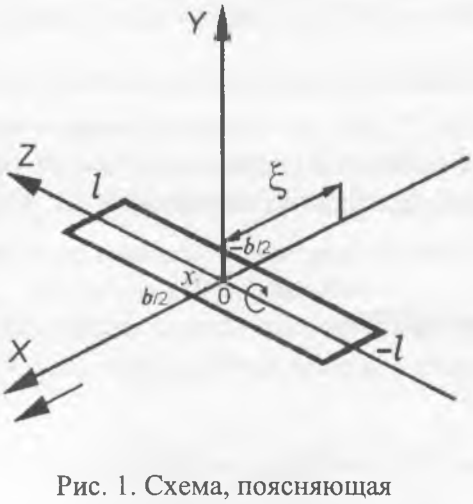

Рис. 1. Схема, поясняющая постановку задачи.

$$
\begin{aligned}
Y &= -m^* \frac{dv_n}{dt} - \rho U \cos\alpha \int_{-l}^{l} \Gamma(z)dz, \\
X &= m^* v_n \omega_z + \rho v_n \int_{-l}^{l} \Gamma(z)dz - Xi.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где U – абсолютная скорость движения крыла (относительно неподвижной жидкости); v_n – нормальная к плоскости крыла составляющая скорости U; m^* – присоединенная масса крыла; Γ – циркуляция в сечении крыла Z; ρ – плотность жидкости; $\omega = \dfrac{d\vartheta}{dt}$.

Подъемная сила Y, нормальная к плоскости крыла, включает составляющую, обусловленную влиянием инерционности среды, и циркуляционную составляющую. Вектор подсасывающей силы X в плоскости крыла перпендикулярен оси $0Z$. Величина X определяется значениями инерционного члена $m^* v_n \omega_z$, циркуляционного $\rho v_n \int_{-l}^{l} \Gamma(z)\, dz$ и индуктивного сопротивления X_i. Циркуляционные составляющие в соотношениях для подъемной и подсасывающей сил являются соответствующими проекциями силы Жуковского $\rho U \int_{-l}^{l} \Gamma(z)\, dz$, нормальной к вектору мгновенной скорости движения крыла.

Величины U, v_n определены в точках оси симметрии крыла $0Z$:

$$v_n = V_y \cos\vartheta - U_0 \sin\vartheta = U \sin\alpha, \tag{6}$$

где $V_y = dy/dt$, α – мгновенный угол атаки крыла.

Проекция гидродинамических сил на ось $0X$ (сила тяги) будет иметь вид:

$$F_x = X\cos\vartheta - Y\sin\vartheta - \frac{\rho S U^2}{2} C\cos\vartheta. \tag{7}$$

Здесь $C = 2(C_X + C_{P0})$, C_X – коэффициент сопротивления трения, C_{P0} – коэффициент сопротивления формы крыла.

На основании (5) и (7) выражение для силы тяги F_x можно представить в виде:

$$F_x = m^* \frac{d(v_n \sin\vartheta)}{dt} + \rho V_y \int_{-l}^{l} \Gamma(z)\, dz - X_i \cos\vartheta - \frac{\rho S U^2}{2} C\cos\vartheta. \tag{8}$$

Из последнего соотношения следует, что при периодическом законе колебаний среднее за период колебания крыла значение тяги $\overline{F_x}$ будет в основном определяться циркуляционным членом и индуктивным сопротивлением.

В линейном приближении для подъемной силы Y может быть сделана следующая оценка [6, 7]:

$$Y = -m^* \frac{dv_n}{dt} - \rho U\cos\alpha \int_{-l}^{l} \Gamma(z) dz = \frac{\rho U^2}{2} S\left(-C_y^{\alpha}\frac{v_n}{U} - C_y^{\dot\alpha}\frac{\dot v_n b}{U^2} + C_y^{\omega_z}\frac{\omega_z}{U} + C_y^{\dot\omega_z}\frac{\dot\omega_z b^2}{U^2}\right). \tag{9}$$

Здесь $C_y^{\alpha}, C_y^{\dot\alpha}, C_y^{\omega_z}, C_y^{\dot\omega_z}$ – коэффициенты аэродинамических производных (их еще называют коэффициентами вращательных производных [6, 7]), b и S – хорда и площадь крыла соответственно. При оценках Y примем, что коэффициенты гидродинамических производных являются постоянными в течение периода колебаний, зависящими от числа Струхаля, которое имеет вид

$$\mathrm{Sh}_0 = \frac{\omega b}{U_0} \tag{10}$$

Из выражения (9) получим:

$$\int_{-l}^{l} \Gamma(z)\, dz = -\frac{m^* \dot v_n}{\rho U\cos\alpha} + \frac{US}{2\cos\alpha}\left(C_y^{\alpha}\frac{v_n}{U} + C_y^{\dot\alpha}\frac{\dot v_n b}{U^2} - C_y^{\omega_z}\frac{\omega_z b}{U} - C_y^{\dot\omega_z}\frac{\dot\omega_z b^2}{U^2}\right).$$

С учетом выражения (8) получим формулу для тяги:

$$F_x = m*\frac{d\left(v_n \sin\vartheta\right)}{dt} - \frac{m^* \dot{v}_n V_y}{U\cos\alpha} + \frac{\rho V_y US}{2\cos\alpha}\left(C_y^{\alpha}\frac{v_n}{U} + C_y^{\dot\alpha}\frac{\dot{v}_n b}{U^2} - C_y^{\omega_z}\frac{\omega_z b}{U} - C_y^{\dot\omega_z}\frac{\dot\omega_z b^2}{U^2}\right) - \\ - X_i\cos\vartheta - \frac{\rho S U^2}{2} C\cos\vartheta \quad (11)$$

После несложных преобразований с учетом того, что $\frac{V_y}{U} = \sin\theta$, получим

$$F_x = m*\frac{d\left(v_n \sin\vartheta\right)}{dt} + \frac{\rho S}{2\cos\alpha}\left(\begin{array}{l} C_y^{\alpha} v_n V_y + b\left(C_y^{\dot\alpha} - \frac{2m^*}{\rho S b}\right)\dot{v}_n \sin\theta - \\ -C_y^{\omega_z} b\omega_z V_y - C_y^{\dot\omega_z} b^2 \dot\omega_z \sin\theta \end{array}\right) - \\ - X_i\cos\vartheta - \frac{\rho S U^2}{2} C\cos\vartheta. \quad (12)$$

Здесь $\theta = \alpha + \vartheta$ – угол наклона траектории движения крыла.

Соотношение (12) получено в предположении, что кинематические параметры крыла заданы относительно его центра. Однако более интересен общий случай, когда кинематические параметры заданы относительно любой точки продольной оси крыла. Это особенно важно применительно к плаванию дельфинов и рыб с полулунным хвостовым плавником. Существует предположение, что ось вращения хвостовой лопасти дельфина расположена вблизи ее задней кромки [3, 4]. Это подтверждают оценки, сделанные в работах [9, 10] на основе кинематических параметров, полученных экспериментально.

Пусть в системе координат $0XYZ$, движущейся в направлении оси $0X$ с постоянной скоростью U_0, движение крыла задано периодическим законом колебаний точки x_1 (рис. 1): Для оценки гидродинамических сил, развиваемых крылом в этом случае, можно воспользоваться полученным соотношением (12), однако все необходимые соотношения, описывающие движение крыла, должны быть записаны относительно его центра. Следует отметить, что при больших амплитудах линейных и угловых колебаний получение формул для составляющих гидродинамических сил в зависимости от положения оси вращения крыла только путем стандартного пересчета коэффициентов аэродинамических производных в линейном приближении некорректно.

Закон движения рассматриваемого крыла относительно центра определяется проекциями скоростей центра крыла относительно неподвижной жидкости:

$$V_{xc} = V_0 - \omega_z x \sin\vartheta, \quad (13)$$

$$V_{yc} = V_{y1} + \omega_z x \cos\vartheta, \quad (14)$$

где $V_{y1} = \dot{y}(t)$, $\omega_z = \dot\vartheta(t)$, $y(t)$ – вертикальные колебания крыла, x – расстояние от центра крыла до точки x_1. Точка над буквой здесь и далее обозначает производную по времени.

Формула (12) будет иметь вид для случая, когда кинематические параметры движения крыла заданы относительно точки x_1 (а табулированные коэффициенты аэродинамических производных заданы в точке $x_ц$) и пересчитаны к центру крыла:

$$F_{xc} = m^* \frac{d\left(v_{nc}\sin\vartheta\right)}{dt} + \\ + \frac{\rho S}{2\cos\alpha}\left(C_{yc}^{\alpha} v_{nc} V_{yc} + b\left\{ C_{yc}^{\dot{\alpha}} - \frac{2m^*}{\rho S b} \right\} \dot{v}_{nc}\sin\theta_c - bC_{yc}^{\omega_z}\omega_z V_{yc} - b^2 C_{yc}^{\dot{\omega}_z}\dot{\omega}_z \sin\theta_c \right) - \\ - X_i \cos\vartheta - \frac{\rho S U_c^{\,2}}{2} C\cos\vartheta. \tag{15}$$

Здесь и далее F_{xc} – тяга; m^* – присоединенная масса крыла; v_{nc} – нормальная скорость; ρ – плотность среды; θ_c – угол между набегающим на крыло потоком и горизонтальной осью; C – удвоенная сумма коэффициентов сопротивления трения и формы крыла; U_c – мгновенная скорость потока, набегающего на крыло; X_i – индуктивное сопротивление крыла; b – хорда крыла; S – его площадь (одной стороны); $C_{yc}^{\alpha}, C_{yc}^{\alpha'}, C_{yc}^{\omega_z}, C_{yc}^{\omega_z'}$ – коэффициенты аэродинамических производных [6, 7], также пересчитанные к центру крыла. Формула (15) отличается от формулы (12) наличием индекса «*c*» у тех величин, которые пересчитаны к центру крыла. Аналогично соотношениям (13), (14) выпишем выражения для других величин:

$$v_{nc} = V_{y1}\cos\vartheta - U_0\sin\vartheta + \omega_z x = U_c\sin\alpha_c, \tag{16}$$

$$\theta_c = \alpha_c + \vartheta = \mathrm{arctg}\left(V_{yc}/V_{xc}\right),$$

$$U_c^2 = V_{yc}^2 + V_{xc}^2,$$

где α_c – угол атаки, пересчитанный к центру крыла.

Угол наклона крыла не имеет индекса «*c*», так как он одинаков во всех точках крыла, в том числе и в точке x_1. Поэтому он определяется кинематическими параметрами именно этой точки (мгновенный угол набегающего потока θ и угол атаки α в точке x_1). Входящие в формулы (11)–(16) величины $\sin\vartheta$ и $\cos\vartheta$ с учетом условия малости угла атаки могут быть записаны в виде $\sin\vartheta \approx \sin\theta - \alpha\cos\theta$, $\cos\vartheta \approx \cos\theta + \alpha\sin\theta$. Здесь $\cos\theta = \frac{U_0}{U_1}$, $\sin\theta = \frac{\dot{y}}{U_1}$, $U_1 = \sqrt{U_0^2 + (\dot{y})^2}$.

Коэффициент полезного действия (кпд) крыла определяется как отношение полезной энергии к затрачиваемой:

$$\eta = \frac{\overline{A}_c}{\overline{N}_c}, \tag{17}$$

где

$$\overline{A}_c = \overline{F_{xc}} U_0 \tag{18}$$

и

$$\overline{N}_c = -\overline{F_{yc} V_{yc}} - \overline{M_{zc}\omega_z} \tag{19}$$

Здесь F_{xc} и F_{yc} – горизонтальная и вертикальная силы, действующие на крыло соответственно; V_{yc} – вертикальная скорость крыла; M_{zc} – момент сил относительно оси вращения крыла, который имеет вид

$$M_{zc}=\frac{\rho SbU_c^2}{2}\left[-m_{zc}^{\alpha}\alpha_c-m_{zc}^{\dot{\alpha}}\frac{\dot{\alpha}_c b}{U_0}+m_{zc}^{\omega_z}\frac{\omega_z b}{U_0}+m_{zc}^{\dot{\omega}_z}\frac{\dot{\omega}_z b^2}{U_0^2}\right] \tag{20}$$

В скобках формулы (20) величины $m_{zc}^{\alpha}, m_{zc}^{\dot{\alpha}}, m_{zc}^{\omega_z}, m_{zc}^{\dot{\omega}_z}$ – коэффициенты вращательных производных момента [6, 7], также пересчитанные к центру крыла.

Проекция гидродинамических сил на ось $0Y$ будет иметь вид (кинематические параметры определены в центре крыла)

$$F_y=X\sin\vartheta+Y\cos\vartheta-\frac{\rho SU^2}{2}C\sin\vartheta .$$

Это выражение с учетом соотношений (5) и (9) может быть записано в виде:

$$\begin{aligned}F_y={}&m^*v_n\omega_z\sin\vartheta-\frac{m^*v_n\dot{v}_n\sin\vartheta}{U\cos\alpha}+\frac{\rho v_nSU\sin\vartheta}{2\cos\alpha}\left(C_y^{\alpha}\frac{v_n}{U}+C_y^{\dot{\alpha}}\frac{\dot{v}_nb}{U^2}-C_y^{\omega_z}\frac{\omega_zb}{U}-\frac{C_y^{\dot{\omega}_z}\dot{\omega}_zb^2}{U^2}\right)-\\&-\frac{\rho U^2S\cos\vartheta}{2}\left(C_y^{\alpha}\frac{v_n}{U}+C_y^{\dot{\alpha}}\frac{\dot{v}_nb}{U^2}-C_y^{\omega_z}\frac{\omega_zb}{U}-C_y^{\dot{\omega}_z}\frac{\dot{\omega}_zb^2}{U^2}\right)-X_i\sin\vartheta-\frac{\rho SU^2}{2}C\sin\vartheta.\end{aligned} \tag{21}$$

В правой части формулы (21) прибавим и вычтем выражение $m^*\dot{v}_n\cos\vartheta$. В результате получим после некоторых преобразований:

$$\begin{aligned}F_y={}&-m^*\frac{d\left(v_n\cos\vartheta\right)}{dt}+\left(\cos\vartheta-\frac{v_n\sin\vartheta}{U\cos\alpha}\right)\left[\begin{array}{l}\dfrac{2m^*\dot{v}_n}{\rho SU^2}-\\-\left(C_y^{\alpha}\dfrac{v_n}{U}+C_y^{\dot{\alpha}}\dfrac{\dot{v}_nb}{U^2}-C_y^{\omega_z}\dfrac{\omega_zb}{U}-\dfrac{C_y^{\dot{\omega}_z}\dot{\omega}_zb^2}{U^2}\right)\end{array}\right]\frac{\rho SU^2}{2}-\\&-X_i\sin\vartheta-\frac{\rho SU^2}{2}C\sin\vartheta.\end{aligned} \tag{22}$$

Учитывая, что $\frac{v_n}{U}=\sin\alpha$, проведем промежуточные преобразования $\cos\vartheta-\frac{v_n\sin\vartheta}{U\cos\alpha}=\frac{\cos\theta}{\cos\alpha}$. Тогда получим окончательно:

$$\begin{aligned}F_y={}&-m^*\frac{d\left(v_n\cos\vartheta\right)}{dt}+\frac{\cos\theta}{\cos\alpha}\frac{\rho S}{2}\left[\begin{array}{l}-C_y^{\alpha}v_nU-b\left(C_y^{\dot{\alpha}}-\dfrac{2m^*}{\rho Sb}\right)\dot{v}_n+\\+C_y^{\omega_z}\omega_zbU+C_y^{\dot{\omega}_z}\dot{\omega}_zb^2\end{array}\right]-\\&-X_i\sin\vartheta-\frac{\rho SU^2}{2}C\sin\vartheta.\end{aligned} \tag{23}$$

В этой формуле все кинематические параметры и производные берутся в центре крыла. Если кинематические параметры определены в произвольной точке крыла, а коэффициенты аэродинамических производных – в точке $x_{ц}$, выражение (23) примет следующий вид:

$$F_{yc} = -m^* \frac{d\left(v_{nc}\cos\vartheta\right)}{dt} + \frac{\rho S}{2\cos\alpha_c}\left[\begin{array}{l} -C_{yc}^{\alpha} v_{nc} U_c \cos\theta_c - \left(C_{yc}^{\dot\alpha} - \dfrac{2m^*}{\rho S b}\right) b \dot v_{nc}\cos\theta_c + \\ +C_{yc}^{\omega_z}\omega_z b U_c\cos\theta_c + C_{yc}^{\dot\omega_z}\dot\omega_z b^2\cos\theta_c \end{array}\right] - \tag{24}$$

$$- X_{ic}\sin\vartheta - \frac{\rho S U_c^2}{2} C\sin\vartheta.$$

Индекс «*c*» обозначает, что все параметры пересчитаны к центру крыла. Учитывая, что $U_c\cos\theta_c = V_{yc}$ и $\cos\alpha \cong 1$, получим:

$$F_{yc} = -m^* \frac{d\left(v_{nc}\cos\vartheta\right)}{dt} + \frac{\rho S}{2}\left[\begin{array}{l} -C_{yc}^{\alpha} v_{nc} V_{yc} - \left(C_{yc}^{\dot\alpha} - \dfrac{2m^*}{\rho S b}\right) b \dot v_{nc}\cos\theta_c + \\ +C_{yc}^{\omega_z}\omega_z b V_{yc} + C_{yc}^{\dot\omega_z}\dot\omega_z b^2\cos\theta_c \end{array}\right] -$$

$$- X_{ic}\sin\vartheta - \frac{\rho S U_c^2}{2} C\sin\vartheta$$

Оценим долю подсасывающей силы в общей тяге (X_{xc}). В этом случае получим выражение

$$\begin{aligned} X_{xc} &= m^* v_{nc}\omega_z\cos\vartheta - m^*\dot v_{nc}\alpha_c\cos\vartheta + \\ &+ \frac{\rho S}{2}\left(C_{yc}^{\alpha} v_{nc}^2 + C_{yc}^{\dot\alpha}\dot v_{nc} b\alpha_c - C_{yc}^{\omega_z}\omega_z b v_{nc} - C_{yc}^{\dot\omega_z}\dot\omega_z b^2\alpha_c\right)\cos\vartheta. \end{aligned} \tag{25}$$

Все табулированные коэффициенты вращательных производных [6, 7] соответствуют стандартной системе координат (*x, y, z*), начало которой расположено в плоскости симметрии крыла на расстоянии ¼ хорды от передней кромки центрального сечения крыла (центровка $x_ц$ = 0.25). Поскольку кинематические параметры крыла приведены к его центру, коэффициенты аэродинамических производных также должны быть пересчитаны к центру крыла (x_c, y_c, z_c). Методику пересчета рассмотрим для случая бесконечного крыла на примере одного значения числа Струхаля, равного единице. В двух верхних строках таблицы приведены исходные значения коэффициентов аэродинамических (вращательных) производных (для $x_ц$ = 0.25), в двух последних – пересчитанные значения для центра крыла.

Исходные (для $x_ц$ = 0.25) и пересчитанные к центру крыла
значения коэффициентов аэродинамических (вращательных) производных

C_y^{α}	$C_y^{\dot\alpha}$	$C_y^{\omega_z}$	$C_y^{\dot\omega_z}$	m_z^{α}	$m_z^{\dot\alpha}$	$m_z^{\omega_z}$	$m_z^{\dot\omega_z}$
3.757	0.6239	1.878	–0.0807	0	$-\pi/8$	$-\pi/8$	$-3\pi/64$
C_{yc}^{α}	$C_{yc}^{\dot\alpha}$	$C_{yc}^{\omega_z}$	$C_{yc}^{\dot\omega_z}$	m_{zc}^{α}	$m_{zc}^{\dot\alpha}$	$m_{zc}^{\omega_z}$	$m_{zc}^{\dot\omega_z}$
3.757	0.6239	0.9388	–0.2367	0.9393	–0.2365	–0.1578	–0.1082

Формулы пересчета выглядят следующим образом: $C_{yc}^{\alpha} = C_y^{\alpha}$, $C_{yc}^{\dot\alpha} = C_y^{\dot\alpha}$, $C_{yc}^{\omega_z} = C_y^{\omega_z} + C_y^{\alpha}\xi_0$, $C_{yc}^{\dot\omega_z} = C_y^{\dot\omega_z} + C_y^{\dot\alpha}\xi_0$, $m_{zc}^{\alpha} = m_z^{\alpha} - C_y^{\alpha}\xi_0$, $m_{zc}^{\dot\alpha} = m_z^{\dot\alpha} - C_y^{\dot\alpha}\xi_0$, $m_{zc}^{\omega_z} = m_z^{\omega_z} - \left(C_y^{\omega_z} - m_z^{\alpha}\right)\xi_0 - C_y^{\alpha}\xi_0^2$, $m_{zc}^{\dot\omega_z} = m_z^{\dot\omega_z} - \left(C_y^{\dot\omega_z} - m_z^{\dot\alpha}\right)\xi_0 - C_y^{\dot\alpha}\xi_0^2$. Здесь $\xi_0 = -0.25$.

Соотношения (15), (17)–(20) и (25) имеют общий вид и справедливы при любых кинематических параметрах крыла. Что же касается формы крыла, то указанные соотношения наиболее точно выполняются для бесконечных и прямоугольных крыльев при чисто линейных колебаниях. Однако если учесть, что в указанных соотношениях члены, связанные с вращением крыла относительно оси z (члены с производными $C_{yc}^{\omega_z}$ и $C_{yc}^{\dot{\omega}_z}$), значительно меньше членов, определяющих линейные колебания (на порядок), эти соотношения могут быть применены также для треугольных и кольцевых крыльев. Они могут быть использованы для оценки тяги, подсасывающей силы и кпд крыла методами вычислительной математики, что очень громоздко и требует определенной квалификации и навыков. Соотношения (15), (21)–(24) и (37) могут быть преобразованы в относительно простые расчетные формулы путем усреднения за период колебаний в случае гармонических колебаний крыла для конкретного закона линейных и угловых колебаний. Такие преобразования были проведены и получены расчетные формулы для трех вариантов кинематических параметров:

а) вертикальные и угловые колебания совершаются по гармоническому закону:

$$y = y_0 \sin \omega t,$$

$$\vartheta = \vartheta_0 \cos \omega t;$$

б) вертикальные колебания и угол атаки изменяются по гармоническому закону:

$$y = y_0 \sin \omega t,$$

$$\alpha = \alpha_0 \cos \omega t;$$

в) угловые колебания и угол атаки изменяются по гармоническому закону:

$$\vartheta = \vartheta_0 \cos \omega t,$$

$$\alpha = \alpha_0 \cos \omega t.$$

В последнем случае линейные колебания крыла совершаются по весьма сложному закону [11]: $\dot{y} = U_0 \mathrm{tg}(\alpha + \vartheta)$. При очень малых значениях углов α и ϑ этот закон близок к гармоническому. Полученные расчетные формулы опубликованы [9, 10, 12–18].

Формулы применимы также для чисто линейных и крутильных колебаний крыла. В первом случае следует полагать $\vartheta_0 = 0$, во втором $\lambda_P = \dfrac{U_0}{y_0 \omega} = \infty$.

В линейном приближении значения коэффициентов аэродинамических производных и присоединенная масса определяются формой крыла и числом Струхаля. При расчетах составляющих гидродинамических сил использованы известные решения для коэффициентов аэродинамических производных первого порядка, которые табулированы в широком интервале чисел Струхаля для четырех типов крыльев: бесконечного, прямоугольного, треугольного и кольцевого [6, 7]. При этом необходимо учитывать следующие обстоятельства. Если определять по таблицам коэффициенты аэродинамических производных по числу Струхаля (см. (10)), то гидродинамические силы, вычисленные по расчетным формулам, будут соответствовать линейному варианту теории. В этом случае при больших амплитудах линейных и угловых колебаний крыла может иметь место увеличение ошибок результатов расчета с увеличением чисел Струхаля. Оценить эти ошибки можно путем сравнения расчетов по приведенным формулам с результатами нелинейных теоретических моделей и экспериментальными исследованиями реальных крыльев.

Для того чтобы учесть нелинейность вихревого следа за крылом, коэффициенты аэродинамических производных следует определять по числу Струхаля, имеющему вид

$$\mathrm{Sh} = \frac{(\mathrm{Sh}_0)\lambda_F}{\sqrt{\lambda_P^2 + 1}} \tag{26}$$

Формула для присоединенной массы крыла бесконечного размаха на единицу длины имеет вид $m^{*} = \rho\pi b^2/4$, для прямоугольного и треугольного крыльев – $m^{*} = (k_{22})\rho S b$, где (k_{22}) – коэффициент присоединенной массы [7], S – площадь крыла, b – хорда.

На рис. 2, 3 сравниваются результаты численных решений по линейной и нелинейной теориям для коэффициентов тяги и мощности жесткого крыла [19–21], экспериментальные результаты исследования прямоугольного крыла с удлинением более 6 (практически бесконечное крыло) [20] и результаты вычислений по полученным формулам (в предположении, что крыло бесконечное).

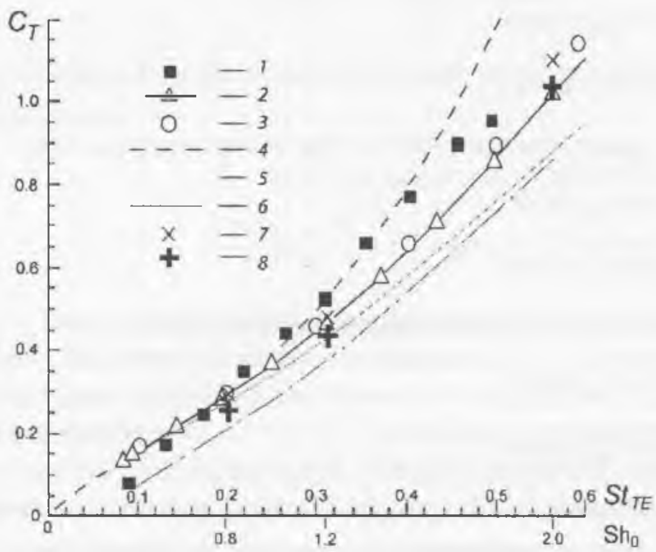

Рис. 2. Сравнение результатов экспериментального определения коэффициента тяги прямоугольного жесткого крыла с удлинением больше 6 (*1*) [20], нелинейного численного решения (*2*), (*3*), (*5*), (*6*) [18, 20, 21], линейной теории (4) [5] и вычислений по полученным формулам (*7*), (*8*) [18]. Вычисления проведены без учета сопротивления трения и формы (7) и с учетом сопротивления крыла (8). Кинематические параметры крыла: $y_0/b = 0.75$, $\alpha_0 = 15°$.

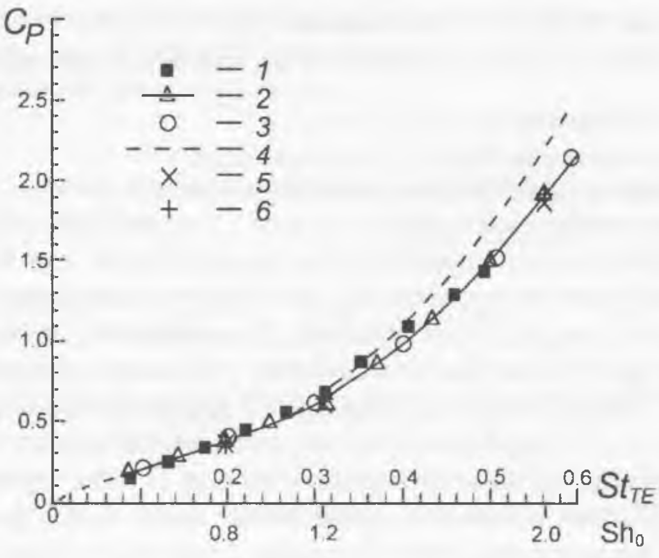

Рис. 3. Сравнение результатов экспериментального определения коэффициента мощности (*1*) [20], нелинейного численного решения (*2*), (*3*) [19, 20], линейной теории (*4*) [5] и вычислений по полученным формулам (*5*), (*6*) [18] без учета сопротивления трения и формы крыла и с учетом соответственно. Кинематические параметры крыла: $y_0/b = 0.75$, $\alpha_0 = 15°$.

Оценим область значений кинематических параметров, для которых применимы полученные формулы. В работе [22] дана классификация вихревого следа за крылом, совершающим только линейные колебания, по параметрам Sh_0 и y_0/b при постоянном значении произведения $Sh_0 y_0/b = 0.1$. При $Sh_0 = 0.1$ и $y_0/b = 1.0$ след можно считать линейным. При $Sh_0 = 1$ и $y_0/b = 0.1$ след нелинеен, но не деформирован. В этом случае отдельные элементы следа переносятся вниз по потоку, образуя синусоидальный след фиксированной длины волны и амплитуды. Для такого следа возможно применение расчетных формул с коэффициентами аэродинамических производных, определенных по числу Струхаля в форме (26). При $Sh_0 = 10$ и $y_0/b = 0.01$ след заметно деформирован. В последнем случае линейная теория не способна учитывать вихри, расположенные вне поверхности следа.

На рис. 4 приведена зависимость коэффициентов тяги, мощности и полезного действия для чисто линейных колебаний в широком интервале чисел Струхаля [22]. Видно, что при числе Струхаля около 4–5 результаты численных решений отходят от результатов линейного решения и вычисленных по формулам. Начиная с этих чисел Струхаля след сильно деформирован. На рис. 5 приведена аналогичная зависимость для комбинации линейных и крутильных колебаний [22]. Видно, что вычисленные по формулам значения кпд отходят от результатов численного решения при числах Струхаля, равных около 5.

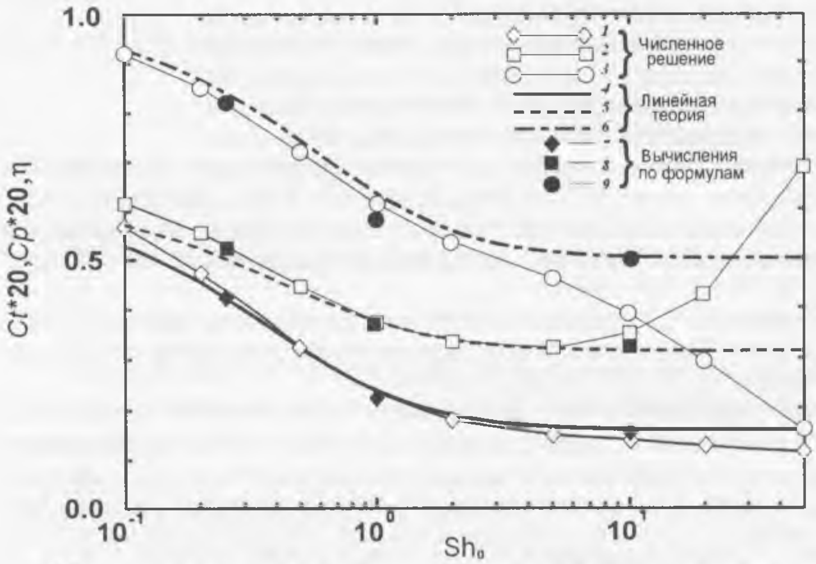

Рис. 4. Зависимость коэффициентов тяги (поз.*1*, *4*, *7*), мощности (поз.*2*, *5*, *8*) и полезного действия (поз.*3*, *6*, *9*) от числа Струхаля для чисто линейных колебаний. $Sh_0 y_0/b = 0.1$ [22]. *1*, *2*, *3* – данные работы [22]; *4*, *5*, *6* – данные работы [5]; *7*, *8*, *9* – значения, вычисленные по формулам работы [18].

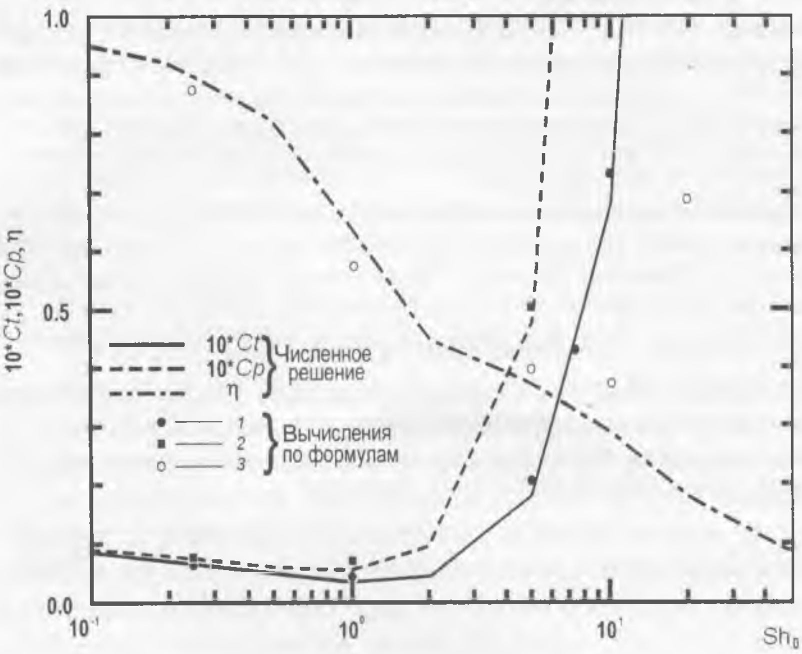

Рис. 5. Зависимость коэффициентов тяги, мощности и полезного действия от числа Струхаля для комбинации линейных и угловых колебаний, $Sh_0 y_0/b = 0.1$ [22]. Численное решение по данным работы [22]; *1*, *2*, *3* – значения, вычисленные по формулам работы [18].

Анализ представленных данных позволяет считать, что расчетные формулы дают возможность получать не только линейные, но и нелинейные решения до чисел Струхаля, равные около 5.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 08-04-00358а. Авторы выражают искреннюю благодарность Р.И. Герасимовой за помощь в подготовке иллюстраций.

Литература

1. *Некрасов А.И.* Теория крыла в нестационарном потоке. М.: Изд-во АН СССР, 1947. 258 с.
2. *Седов Л.И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 448 с.
3. *Lighthill M.J.* Hydromechanics of Aquatic Animal Propulsion // Ann. Rev. Fluid Mech. 1969. N 4. P.413–446.
4. *Wu T.Y.-T.* Hydromechanics of swimming propulsion. Pt 1. Swimming of a two-dimensional flexible plate at variable forward speeds in an inviscid fluid // J. Fluid Mech. 1971. V.46, N 2. P.337–355.
5. *Garrick I.E.* Propulsion of a flapping and oscillating airfoil. NACA Report 567. 1936. P.419–427.
6. *Белоцерковский С.М.* О коэффициентах вращательных производных // Тр. ЦАГИ. 1958. Вып.725. С.2–28.
7. *Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К., Табачников В.Г.* Крыло в нестационарном потоке газа. М.: Наука, 1971. 768 с.
8. *Д.Н. Горелов.* Методы решения плоских краевых задач теории крыла. Новосибирск: Изд. СО РАН, 2000. 215 с.
9. *Романенко Е.В.* Гидродинамика рыб и дельфинов. М.: КМК, 2001. 412 с.
10. *Romanenko E.V.* Fish and Dolphin Swimming. Sofia-Moscow. Pensoft, 2002. 430 p.
11. *Prempraneerach P., Hover F.S., Triantafyllou M.S.* The effect of chordwise flexibility on the thrust and efficiency of a flapping foil // 13-rd Int. Symp. Unmanned Untethered Submersible Techn., Durham, NH, Aug. 24–27 2003. P.1–11.
12. *Пушков С.Г., Романенко Е.В., Лопатин В.Н.* Индуктивное сопротивление жесткого крыла // Успехи современной биологии. 2009. Т.129, № 1. С.105–114.
13. *Романенко Е.В., Пушков С.Г., Лопатин В.Н.* Гидродинамические силы, развиваемые крылом, при различных положениях оси его вращения. Тяга, мощность и кпд при гармоническом законе угловых колебаний // Успехи современной биологии. 2009. Т.129, № 5. С.481–492.
14. *Пушков С.Г., Романенко У.В.* Гидродинамические силы, действующие на жесткое крыло при его движении с большими амплитудами поперечных и угловых колебаний // Успехи современной биологии. 2000. Т.120, № 2. С.207–216.
15. *Романенко Е.В., Пушков С.Г., Лопатин В.Н.*. Гидродинамические силы, развиваемые крылом, при различных положениях оси его вращения. Тяга при гармоническом законе угловых колебаний // Успехи современной биологии. 2005. Т.125, № 5. С.478–483.
16. *Пушков С.Г., Романенко Е.В., Лопатин В.Н.* Гидродинамические силы, развиваемые крылом, при различных положениях оси его вращения. Тяга при гармоническом угле атаки // Успехи современной биологии. 2006. Т.126, № 3. С.318–324.
17. *Романенко Е.В., Пушков С.Г., Лопатин В.Н.* Гидродинамические силы, развиваемые крылом, при различных положениях оси его вращения. Тяга при гармоническом изменении углов наклона и атаки // Успехи современной биологии. 2007. Т.127, № 3. С.299-304.
18. *Романенко Е.В., Пушков С.Г.* Гидродинамика дельфинов, рыб и ластоногих // Сб. науч. тр. «Фундаментальная и прикладная гидрофизика». СПб.: Наука, 2008. № 2. С.13–28.
19. *Young J., Lai J.C.S., Kaya M., Tuncer I.H.* Thrust and Efficiency of Propulsion by Oscillating Foils // 3^{rd} International Conference on Computational Fluid Dynamics (ICCFD3). Toronto, July, 2004. P.313–318.
20. *Anderson J.M., Streitlien K., Barret D.S., Triantofillou M.S.* Oscillating foils of high propulsive efficiency // J. Fluid Mech. 1998. V.360. P.41–72.
21. *Shuchi Yang, Shijun Luo, Feng Liu, Her-Mann Tsai.* Computation of the Flows over Flapping Airfoil by the Euler Equations // AIAA 43^{rd} Aerospace Sciences Meeting, Reno, NV, Jan. 10–13, 2005. P.1–20.
22. *Jones K.D., Platzer M.F.* Numerical computation of flapping-wing propulsion and power extraction // 35^{th} aerospace Sciences Meeting@ Exhibit. January 6–10, 1997/Reno, NV. P.1–16.

Статья поступила в редакцию 20.04.2010 г.