

УДК 577.31

© Е. В. Романенко¹, С. Г. Пушков²

¹Институт проблем экологии и эволюции им. А. Н. Северцова РАН, Москва

²ОАО «Летно-исследовательский институт им. М. М. Громова», г. Жуковский
evromanenko33@mail.ru

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ СИЛЫ, РАЗВИВАЕМЫЕ КРЫЛОМ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ФАЗОВОМ СДВИГЕ МЕЖДУ ЛИНЕЙНЫМИ И УГЛОВЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ

Построена математическая модель плоского жесткого крыла различного удлинения при больших амплитудах линейных и угловых колебаний и различных положениях его оси вращения. При создании модели использованы приближенные выражения для составляющих гидродинамических сил через коэффициенты аэродинамических производных первого порядка. Получены расчетные формулы для вычисления тяги в случае гармонических линейных и угловых колебаний при произвольном фазовом сдвиге между ними. Показано хорошее согласие результатов расчета по полученным формулам с известными численными решениями.

Ключевые слова: крыло, коэффициент тяги, математическое моделирование, линейные и угловые колебания.

В ряде публикаций [1—5] авторы обосновали концепцию математического моделирования пропульсивных характеристик колеблющегося крыла на основе использования обширной базы данных по гидродинамическим характеристикам крыла и коэффициентам аэро-гидродинамических производных первого порядка.

Постановка задачи построения математических моделей в широком диапазоне изменения удлинения крыла и кинематических параметров движения исходила из изучения вопросов гидродинамики плавания дельфинов и рыб [1, 2]. Разработка адекватной модели имеет научное и практическое значение как при оценивании режимов плавания гидробионтов, так и при создании крыльевых движителей, при выборе оптимальных параметров движителя для достижения заданных значений силы тяги и максимальной эффективности.

Возможность в рамках концепции представления характеристик крыла (тяга, мощность, индуктивное сопротивление) в виде полиномиальных зависимостей от конечного числа параметров представляется важной для последующей параметрической идентификации математических моделей в процессе экспериментальных исследований и испытаний движителя.

В настоящей работе особое внимание уделено ранее не рассматривавшейся задаче определения силы тяги в случае гармонических линейных и угловых колебаний крыла при произвольном фазовом сдвиге между ними.

Математическая модель пропульсивной характеристики крыла. Построение математической модели опирается на известные решения малоамплитудной теории колеблющегося крыла [6, 7].

Общее выражение для силы тяги симметричного крыла в плане (рис. 1) было получено в работах [1, 2]:

$$F_{xc} = \lambda_{22} \frac{d(v_{nc} \sin \vartheta)}{dt} + \frac{\rho S}{2 \cos \alpha_c} \left(C_{yc}^\alpha v_{nc} V_{yc} + b \left(C_{yc}^\alpha - \frac{2\lambda_{22}}{\rho S b} \right) \dot{v}_{nc} \sin \theta_c - C_{yc}^{\omega_z} b \omega_z V_{yc} - C_{yc}^{\omega_z} b^2 \dot{\omega}_z \sin \theta_c \right) - X_i \cos \vartheta - \frac{\rho S U_c^2}{2} C \cos \vartheta. \quad (1)$$

Индекс «с» у некоторых параметров указывает на то, что параметр определен в центре крыла. Здесь и далее α_c — угол атаки, пересчитанный к центру крыла (считается малым); ϑ — угол наклона крыла к горизонтальной оси; λ_{22} — присоединенная масса крыла; v_{nc} — нормальная скорость; ρ — плотность среды; θ_c — угол между набегающим на крыло потоком и горизонтальной осью; C — сумма коэффициентов сопротивления трения и формы крыла; U_c — мгновенная скорость потока, набегающего на крыло; X_i — индуктивное сопротивление крыла; b — хорда крыла; S — его площадь (одной стороны); $C_{yc}^\alpha, C_{yc}^{\dot{\alpha}}, C_{yc}^{\omega_z}, C_{yc}^{\dot{\omega}_z}$ — коэффициенты аэродинамических производных [6], пересчитанные также к центру крыла. Входящие в формулу (1) кинематические параметры имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} V_{xc} &= U_0 - \omega_z x \sin \vartheta, \\ V_{yc} &= V_{y1} + \omega_z x \cos \vartheta, \\ v_{nc} &= V_{y1} \cos \vartheta - U_0 \sin \vartheta + \omega_z x = U_c \sin \alpha_c, \\ \theta_c &= \alpha_c + \vartheta = \arctg(V_{yc} / V_{xc}), \\ U_c^2 &= V_{yc}^2 + V_{xc}^2; \end{aligned}$$

здесь $V_{y1} = \dot{y}(t)$, $\omega_z = \dot{\vartheta}(t)$, $y(t)$ — вертикальные колебания крыла; U_0 — поступательная скорость движения; x — расстояние от центра крыла до рассматриваемой точки x_1 , относительно которой известны кинематические параметры крыла (рис. 1). Точка над буквой здесь и далее обозначает производную по времени.

При осреднении за период колебания выражение (1) по сути представляет в общем виде математическую модель пропульсивной характеристики крыла (сила тяги).

Не останавливаясь на частных вопросах решения (1), подробно изложенных в [1—5], поясним физический смысл составляющих. Подобно решению плоской задачи в случае малых поперечных скоростей и углов наклона

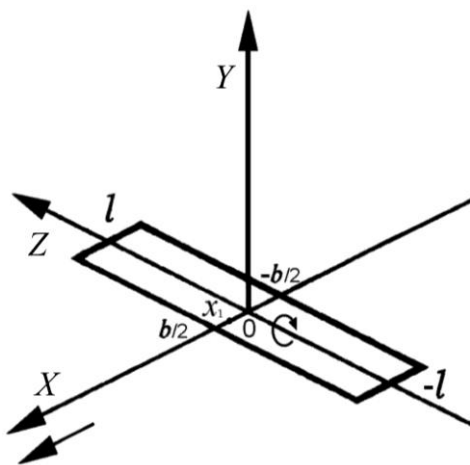


Рис. 1. Схема крыла.
 $OXYZ$ — связанная система координат,
 l — полуразмах крыла, b — хорда.

профиля [6, 7] полученное решение (1) является аналогом стационарного приближения для гидродинамических сил, которое определяется мгновенным скоростным напором и гидродинамическими характеристиками крыла. Оно включает в себя проекции силы Жуковского на горизонтальную ось, индуктивное и профильное сопротивление (сопротивление крыла при $C_y = 0$). В отличие от стационарного приближения выражение (1) учитывает составляющие гидродинамических сил за счет инерционности среды и нестационарного следа за крылом. Как и в случае малоамплитудной теории, принимается, что значения коэффициентов производных зависят от геометрии крыла и числа Струхала.

Для того чтобы учесть нелинейность вихревого следа за крылом, коэффициенты аэродинами-

ческих производных определяются по числу Струхаля, имеющему вид $Sh = \frac{U_0}{U_a} Sh_0$, где U_a — амплитудное значение мгновенной скорости, $Sh_0 = \omega b / U_0$ — число Струхаля в малоамплитудной теории колеблющегося крыла.

Здесь следует оговориться, что в общем случае движения крыла с большими амплитудами угловых и поперечных колебаний учет влияния на коэффициенты аэродинамических производных таких факторов нестационарности, как непостоянство мгновенных значений скорости крыла, кривизна и трансформация вихревого следа, которыми пренебрегают в малоамплитудной теории, является непростой задачей. Формальный подход ввода поправки на число Струхаля обоснован удовлетворительной сходимостью результатов определения характеристик по представленному приближению и соответствующих решений нелинейной задачи в ряде частных случаев кинематики движения и геометрии крыла [1—5].

Представление математической модели в виде (1) является особенно выигрышным в случае умеренных удлинений крыла: $2 \leq \lambda \leq 5$. При таких значениях λ неплохим приближением для индуктивного сопротивления крыла является оценка «сверху», т. е. по максимуму [2]: $X_i \leq \rho \pi S v_n^2 / 4$. В других случаях эта составляющая в выражении для силы тяги должна быть оценена и при необходимости уточнена. В случае крыла бесконечного удлинения более точное решение для индуктивного сопротивления показано в работе [3].

В частных случаях движения, когда фазовый сдвиг между линейными и угловыми колебаниями составляет 90° , математическая модель пропульсивных характеристик крыла была детализирована и доведена до конечных аналитических выражений. Адекватность математической модели была обоснована методами сравнения с известными численными решениями [1, 2].

Представим решение задачи определения силы тяги при произвольных значениях фазового сдвига между угловыми и линейными колебаниями.

Расчетные формулы для вычисления тяги в случае гармонических линейных и угловых колебаний при произвольном фазовом сдвиге между ними. Подавляющее большинство исследований в теории гидродинамики жесткого колеблющегося крыла выполнены для одного частного случая, когда угловые колебания опережают линейные на 90 градусов. Это объясняется тем, что при фазовом сдвиге, близком к 90° (точнее между 90 и 100°), достигается максимальное значение коэффициента полезного действия. Однако коэффициент тяги при этом, как правило, не является максимальным. Максимальная тяга достигается при углах сдвига фазы около 120° [8]. К интересному выводу приводит анализ детальных экспериментальных исследований кинематики хвостовой лопасти дельфина, у которой фазовый сдвиг между линейными и угловыми колебаниями может отличаться от 90° [4, 5]. Возможно, в различных ситуациях дельфину важно достигать либо максимальной тяги, либо максимального коэффициента полезного действия.

Таким образом, для изучения гидродинамики плавания дельфинов и рыб представляется важным вопрос оценки гидродинамических характеристик крыла в широком диапазоне изменения фазового угла между линейными и угловыми колебаниями. Решение задачи имеет значение и при проектировании крыльевых движителей.

В мировой научной литературе очень мало работ, посвященных задаче расчета гидродинамических сил при произвольном значении фазового угла. При поиске публикаций по рассматриваемой теме были обнаружены лишь три работы [8—10], где рассматривается только плоская задача.

Рассмотрим самый общий случай, когда кинематика произвольной точки крыла определяется выражениями для линейных и угловых колебаний

$$y = y_0 \sin \omega t ,$$

$$\vartheta = \vartheta_0 \sin(\omega t + \varphi).$$

Здесь φ — фазовый угол между линейными и угловыми колебаниями крыла.

Формула (1) может быть представлена в форме коэффициентов тяги подобно тому, как это было сделано в работе [2]:

$$\bar{C}_T = \frac{2\overline{F_{xc}}}{\rho S U_0^2} = C_{T1} + C_{T2} + C_{T3} + C_{T4} + C_{T5} + C_{T6}. \quad (2)$$

Члены в правой части формулы (2) неравноценны по величине. Предварительные оценки показывают, что наиболее значимы первый, пятый и шестой. Сумма второго, третьего и четвертого членов весьма мала по сравнению с остальными и в первом приближении ею можно пренебречь, тем более что эти члены весьма громоздки. Остальные члены имеют следующий вид:

$$C_{T1} = C_y^a \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2\lambda_p^2} [1 - 0.125\vartheta_0^2 (2 - \cos 2\phi)] - \frac{\vartheta_0 \sin \phi}{2\lambda_p} (1 - 0.125\vartheta_0^2) + \\ & + \frac{(\text{Sh}_0) \vartheta_0 X \cos \phi}{2\lambda_p} (2 - 0.25) + \frac{(\text{Sh}_0)^2 \vartheta_0^2 X^2}{2} (1 - 0.125\vartheta_0^2) \end{aligned} \right\},$$

$$C_{T5} = -\frac{\pi}{2} \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\lambda_p^2} [0.5 - 0.1875\vartheta_0^2 (2 - \cos 2\phi) + 0.0469\vartheta_0^4 (1 + 4 \sin^2 \phi)] - \\ & - \frac{\vartheta_0 \sin \phi}{\lambda_p} (1 - 0.875\vartheta_0^2) + \vartheta_0^2 (0.5 - 0.3125\vartheta_0^2) + \\ & + \frac{2(\text{Sh}_0) \vartheta_0 X \cos \phi}{\lambda_p} (0.5 - 0.125\vartheta_0^2) + \\ & + \frac{(\text{Sh}_0)^2 \vartheta_0^2 X^2}{2} (1 - 0.125\vartheta_0^2) \end{aligned} \right\},$$

$$C_{T6} = -C \left\{ \begin{aligned} & (1 - 0.25\vartheta_0^2) + \frac{1}{2\lambda_p^2} [1 - 0.125\vartheta_0^2 (2 - \cos 2\phi)] + \\ & + \frac{2(\text{Sh}_0) \vartheta_0 X \cos \phi}{\lambda_p} (0.5 - 0.125\vartheta_0^2) + \frac{(\text{Sh}_0)^2 \vartheta_0^2 X^2}{2} (1 - 0.125\vartheta_0^2) \end{aligned} \right\}.$$

Здесь и далее $\lambda_p = U_0/\omega y_0$, $\text{Sh}_0 = \omega b/U_0$ — число Струхалия, X — относительное (в хордах крыла) расстояние от оси вращения до центра крыла (положительное, если ось вращения расположена ближе к задней кромке, отрицательное, если она расположена ближе к передней кромке).

Полученные формулы нетрудно преобразовать для очень важных случаев чисто линейных и чисто угловых колебаний крыла. В первом случае полагаем $\vartheta = 0$, во втором $\lambda_p = \infty$.

Для чисто линейных колебаний

$$C_{T1} = C_y^a \left(0.5 \frac{1}{\lambda_p^2} \right), \quad C_{T2} = C_{T3} = C_{T4} = 0,$$

$$C_{T5} = -\frac{\pi}{2} \left(0.5 \frac{1}{\lambda_p^2} \right), \quad C_{T6} = -C \left(1 + \frac{0.5}{\lambda_p^2} \right).$$

Для угловых колебаний

$$C_{T1} = C_y^a \left[\frac{\mathfrak{G}_0^2 (\text{Sh}_0)^2 X^2}{2} (1 - 0.125 \mathfrak{G}_0^2) \right],$$

$$C_{T2} = - \left(C_{yc}^a - \frac{2\lambda_{22}}{\rho S b} \right) \frac{(\text{Sh}_0)^2 \mathfrak{G}_0^2 X}{2} (2 - 0.375 \mathfrak{G}_0^2),$$

$$C_{T3} = -C_{yc}^{\omega_z} \frac{(\text{Sh}_0)^2 \mathfrak{G}_0^2 X}{2} (1 - 0.125 \mathfrak{G}_0^2),$$

$$C_{T4} = 0.1875 C_{yc}^{\omega_z} (\text{Sh}_0)^2 \mathfrak{G}_0^4,$$

$$C_{T5} = -\frac{\pi}{2} \left\{ \mathfrak{G}_0^2 (0.5 - 0.3125 \mathfrak{G}_0^2) + \frac{(\text{Sh}_0)^2 \mathfrak{G}_0^2 X^2}{2} (1 - 0.125 \mathfrak{G}_0^2) \right\},$$

$$C_{T6} = -C \left\{ 1 - 0.25 \mathfrak{G}_0^2 + \frac{(\text{Sh}_0)^2 \mathfrak{G}_0^2 X^2}{2} (1 - 0.125 \mathfrak{G}_0^2) \right\}.$$

Составляющая гидродинамических сил, обусловленная индуктивным сопротивлением крыла (C_{T5}), определена оценкой «сверху» [1—5].

Ниже представим более точное решение для C_{T5} , полученное в работе [3] при рассмотрении плоской задачи, которое нам понадобится далее при сравнении с результатами численного решения в работе [8]:

$$\bar{C}_{T5} = -\frac{2\pi}{U_0^2} \left(\begin{array}{l} D_1 \overline{v_{nc}^2} \cos \vartheta + D_2 \overline{v_{nc} \omega_z} \cos \vartheta + D_3 \frac{v_{nc} \omega_z}{U_c} \cos \vartheta + D_4 \frac{v_{nc} v_{nc}}{U_c} \cos \vartheta + \\ + D_5 \frac{v_{nc} \omega_z}{U_c} \cos \vartheta + D_6 \overline{\omega_z^2} \cos \vartheta + D_7 \frac{\omega_z \omega_z}{U_c} \cos \vartheta + D_8 \frac{v_{nc}}{U_c^2} \cos \vartheta + \\ + D_9 \frac{v_{nc} \omega_z}{U_c^2} \cos \vartheta + D_{10} \frac{\omega_z}{U_c^2} \cos \vartheta \end{array} \right).$$

Здесь (для бесконечного крыла)

$$2\pi D_1 = C_y^a \left(1 - \frac{1}{2\pi} C_y^a \right), \quad 2\pi D_2 = b \left(\frac{1}{\pi} C_y^a C_y^{\omega_z} - \frac{1}{2} C_y^a - C_y^{\omega_z} + \frac{\pi}{2} \right),$$

$$2\pi D_3 = b^2 \left(\frac{1}{\pi} C_y^a C_y^{\omega_z} \right), \quad 2\pi D_4 = b \left(\frac{1}{2} C_y^a - \frac{1}{\pi} C_y^a C_y^a + C_y^a - \frac{\pi}{2} \right),$$

$$2\pi D_5 = b^5 \left(-\frac{1}{2} C_y^{\omega_z} + \frac{1}{\pi} C_y^a C_y^{\omega_z} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} C_y^a \right), \quad 2\pi D_6 = b^2 \left[-\frac{1}{2\pi} (C_y^{\omega_z})^2 + \frac{1}{2} C_y^{\omega_z} - \frac{\pi}{8} \right],$$

$$2\pi D_7 = b^3 \left(-\frac{1}{\pi} C_y^{\omega_z} \dot{C}_y^{\omega_z} + \frac{1}{2} \dot{C}_y^{\omega_z} \right), \quad 2\pi D_8 = b^2 \left[\frac{1}{2} C_y^{\dot{\alpha}} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2\pi} \left(C_y^{\dot{\alpha}} \right)^2 \right],$$

$$2\pi D_9 = b^3 \left(-\frac{1}{2} \dot{C}_y^{\omega_z} + \frac{1}{\pi} C_y^{\dot{\alpha}} \dot{C}_y^{\omega_z} \right), \quad 2\pi D_{10} = -\frac{b^4}{2\pi} \left(C_y^{\omega_z} \right)^2.$$

В случае чисто угловых колебаний крыла это выражение значительно упрощается и после усреднения по времени принимает следующий вид:

$$C_{T5} = \left\{ \begin{array}{l} -C_{yc}^{\alpha} \left(1 - \frac{1}{2\pi} C_{yc}^{\alpha} \right) \left[\frac{\vartheta_0^2}{2} + \frac{(Sh_0)^2 \vartheta_0^2 X^2}{2} (1 - 0.125 \vartheta_0^2) \right] - \\ - \left[\frac{1}{2} C_{yc}^{\omega_z} - \frac{1}{2\pi} \left(C_{yc}^{\omega_z} \right)^2 - \frac{\pi}{8} \right] \left[\frac{(Sh_0)^2 \vartheta_0^2 X^2}{2} (1 - 0.125 \vartheta_0^2) \right] \end{array} \right\}. \quad (3)$$

Результаты расчета коэффициента тяги по полученным формулам, сравнение с известными численными решениями. В работах [8, 10] приведены результаты численного решения для коэффициента тяги в зависимости от фазового сдвига линейных и угловых колебаний жесткого бесконечного крыла с учетом вязкости. Задача решалась при следующих кинематических параметрах (в наших обозначениях): число Струхалиа $Sh_0 = 1.57$, $\vartheta_0 = 30^\circ$, $y_0/b = 0.5$, $\lambda_p = 1.27$, $X = -1/4$. На рис. 2 показаны результаты упомянутых работ и коэффициент тяги крыла, вычисленный по приведенным выше формулам в зависимости от фазового угла между линейными и угловыми колебаниями. Значения коэффициентов аэро-гидродинамических производных определены по таблицам работы [11] и пересчитаны к центру крыла: $C_{yc}^{\alpha} = 3.6216$, $C_{yc}^{\dot{\alpha}} = 0.8764$, $C_{yc}^{\omega_z} = 0.9052$, $C_{yc}^{\dot{\omega}_z} = -0.1737$.

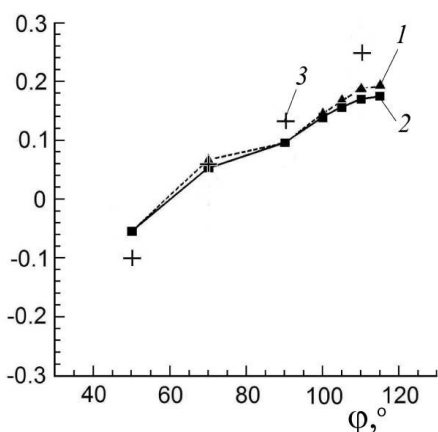


Рис. 2. Сравнение коэффициентов тяги, полученных в работах [8, 10], и коэффициента, вычисленного по приведенным выше формулам в зависимости от фазового угла. 1 — данные [8]; 2 — данные [10]; 3 — вычисленный по формулам.

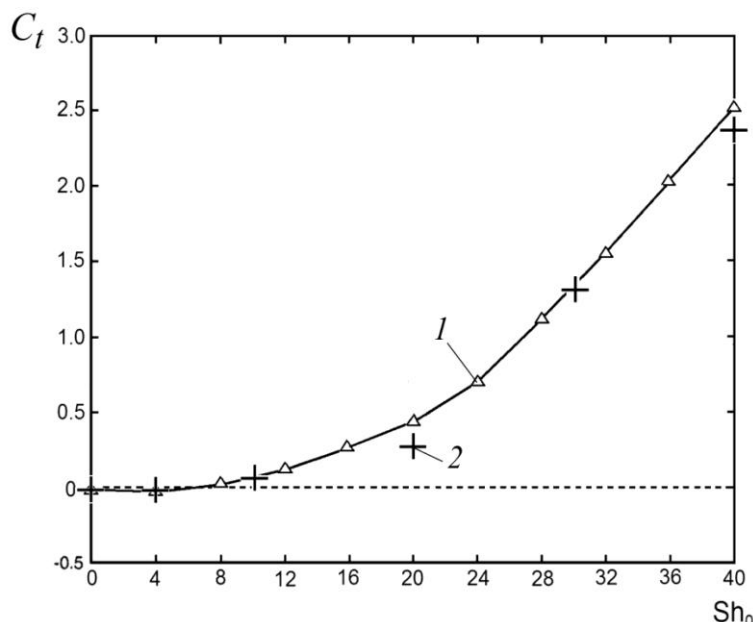


Рис. 3. Сравнение коэффициента тяги, полученного в работе [8] и вычисленного по приведенным выше формулам для чисто угловых колебаний крыла в зависимости от числа Струхалиа. 1 — по данным [8]; 2 — вычисленных по формулам.

На рис. 3 представлены результаты численных оценок коэффициента тяги крыла из работы [8] (без учета вязкости) и наши вычисления по формулам для чисто угловых колебаний в зависимости от числа Струхала. Значения коэффициентов аэрогидродинамических производных определены так же, как и в предыдущем случае и составляют для числа Струхала, равного 10: $C_{yc}^{\alpha} = 3.157$, $\dot{C}_{yc}^{\alpha} = 1.555$, $C_{yc}^{\omega_z} = 0.789$, $\dot{C}_{yc}^{\omega_z} = -0.0038$. Для чисел Струхала 20, 30 и 40 коэффициенты производных практически одинаковы и равны: $C_{yc}^{\alpha} = 3.142$, $\dot{C}_{yc}^{\alpha} = 1.571$, $C_{yc}^{\omega_z} = 0.786$, $\dot{C}_{yc}^{\omega_z} = -0.0001$. Амплитуда угловых колебаний $\vartheta_0 = 5^\circ$. В качестве формулы для коэффициента индуктивного сопротивления использовано выражение (3).

Анализ результатов, представленных на рисунках, позволяет считать, что вычисления по приведенным выше формулам неплохо согласуются с данными численных решений. Одновременно результаты, представленные в настоящей и ранее опубликованных работах [1—5], иллюстрируют эффективность предложенного метода расчета гидродинамических характеристик крыла при различных законах движения.

К сожалению, результаты сравнения с имеющимися решениями плоской задачи при умеренных значениях амплитуд колебаний [1—3] не позволяют распространить вывод об адекватности представленной математической модели при значениях φ , отличных от $\pi/2$, на случаи крыла конечного размаха и более широкого диапазона изменения кинематических параметров.

Авторы выражают искреннюю благодарность Р. И. Герасимовой за помощь в подборе литературы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (проект № 11-04 00234 а).

Литература

1. Пушков С. Г., Романенко Е. В. Гидродинамические силы, действующие на жесткое крыло при его движении с большими амплитудами поперечных и угловых колебаний // Успехи современной биологии. 2000. Т. 120, № 2. С. 207—216.
2. Романенко В. Е., Пушков С. Г. Об одном методе расчета гидродинамических характеристик крыла при нестационарном движении // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2011. Т. 4, № 1. С. 69—80.
3. Пушков С. Г., Романенко Е. В., Лопатин В. Н. Индуктивное сопротивление жесткого крыла // Успехи современной биологии. 2009. Т. 129, № 1. С. 93—103.
4. Романенко Е. В. Гидродинамика рыб и дельфинов. М.: Изд-во КМК, 2001. 412 с.
5. Romanenko E. V. Fish and Dolphin Swimming. PENSOFT. Sofia-Moscow. 2002. 430 p.
6. Некрасов А. И. Теория крыла в нестационарном потоке. М.: Изд-во АН СССР. М.; Л., 1947. 258 с.
7. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966.
8. Pedro G., Suleman A., Djilali N. A numerical study of the propulsive efficiency of a flapping hydrofoil // Int. J. Numer. Meth. Fluids 2003. V. 42. P. 493—526.
9. Mittal R. Computational modeling in bio-hydrodynamics: trends, challenges and recent advances // IEEE J. Oceanic Engineering. 2004. V. 29, N 3. P. 595—604.
10. Zhou C. H., Shu C. A local domain-free discretization method for simulation of incompressible flows over moving bodies // International journal for numerical methods in fluids. 2011. V. 66. P. 162—182.
11. Белоцерковский С. М. О коэффициентах вращательных производных // Тр. ЦАГИ. 1958. Вып. 725. С. 5—28.

Статья поступила в редакцию 13.03.2012 г.

