

УДК 577.31

## ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ СИЛЫ, РАЗВИВАЕМЫЕ КРЫЛОМ, ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ПОЛОЖЕНИЯХ ОСИ ЕГО ВРАЩЕНИЯ. ТЯГА, МОЩНОСТЬ И КПД ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ЗАКОНЕ ИЗМЕНЕНИЯ УГЛОВ НАКЛОНА И АТАКИ

© 2011 г. Е. В. Романенко<sup>1</sup>, С. Г. Пушков<sup>2</sup>, В. Н. Лопатин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем экологии и эволюции им. А.Н. Северцова РАН, Москва

<sup>2</sup>Летно-исследовательский институт им. М.М. Громова Минавиапрома, Московская обл.  
E-mail: evromanenko33@mail.ru

С использованием приближенных выражений для составляющих гидродинамических сил через коэффициенты аэродинамических производных первого порядка построена математическая модель гидродинамических характеристик плоского жесткого крыла различного удлинения при больших амплитудах линейных и угловых колебаний и различных положениях оси вращения крыла. Получены расчетные формулы для вычисления тяги, мощности и КПД в случае гармонических изменений углов наклона и атаки крыла. Показано хорошее совпадение результатов расчета по полученным формулам с известными экспериментальными данными.

*Ключевые слова:* плоское крыло, тяга, мощность, КПД, математическое моделирование.

В теории нестационарной аэрогидродинамики крыла краевые задачи, как правило, сводят к решению интегральных уравнений, которые далее решаются либо численными методами [1, 2, 4, 12–14, 16, 21, 22] (чаще всего), либо аналитическими (в некоторых частных случаях) [1–3, 15]. В книгах Белоцерковского [2] и Горелова [3] изложены некоторые численные методы решения сингулярных интегральных уравнений теории крыла.

Весьма ограничены возможности аналитических методов, которые разработаны достаточно подробно лишь для бесконечных крыльев (плоская задача) в линейной постановке [15]. Для крыльев конечного размаха есть решения только для весьма малых удлинений в случаях очень малых и очень больших значений числа Струхала [2].

Важно отметить, что все решения даже в нелинейной постановке задачи не в полной мере описывают особенности обтекания крыла, формирования вихревого следа при нестационарном движении, являются в каждом конкретном случае лишь некоторым приближением. Одновременно имеющиеся частные решения задачи порой проблематично применить для расчетов гидродинамических характеристик крыла в конкретных случаях кинематики движения крыла определенной формы.

В большинстве известных публикаций чаще всего рассматривается случай гармонических изменений линейных и угловых колебаний крыла [1, 2, 14–17, 21, 22], рассмотрен также случай гармонических изменений линейных колебаний и угла атаки крыла [4, 12, 13] и лишь изредка экспериментально исследуется крыло, у которого по гармоническому закону изменяются угол наклона и атаки [18, 19].

В последние годы в интересах изучения вопросов гидробионики, гидродинамики плавания дельфинов и рыб и оценки пропульсивных характеристик крыльевых движителей ведутся работы по созданию инженерных методов расчета гидродинамических характеристик колеблющегося крыла на основе применения известных решений для коэффициентов аэрогидродинамических производных. Методы позволяют достаточно точно оценить гидродинамические силы, развиваемые жестким крылом, коэффициент полезного действия при больших амплитудах колебаний и произвольном положении оси вращения. Эффективность методов при ряде частных законов движения крыла уже была показана ранее [4–10, 20]. В настоящей работе рассматривается случай движения с гармоническим изменением углов наклона и атаки крыла.

Постановка задачи детально изложена ранее, поэтому здесь мы не будем на этом останавливаться [5–11]. Были получены также выражения для тяги и мощности колеблющегося жесткого крыла, которые приводятся ниже [9].

$$\overline{F}_{xc} = \frac{\rho S}{2} \left( C_{yc}^\alpha \overline{v_{nc} V_{yc}} + b \left\{ C_{yc}^{\dot{\alpha}} - \frac{2m^*}{\rho S b} \right\} \overline{\dot{v}_{nc} \sin \theta_c} - b C_{yc}^{\omega_z} \overline{\omega_z V_{yc}} - b^2 C_{yc}^{\dot{\omega}_z} \overline{\dot{\omega}_z \sin \theta_c} \right) - \overline{X_{ic} \cos \vartheta} - \frac{\rho S}{2} \overline{U_c^2 C \cos \vartheta}. \quad (1)$$

Мощность:

$$\overline{P}_c = - \overline{F_{yc} V_{yc}} - \overline{M_{zc} \omega_z}. \quad (2)$$

Коэффициент полезного действия:

$$\eta = \frac{\overline{A}_c}{\overline{P}_c}. \quad (3)$$

Выражения, входящие в правую часть формулы (2), имеют вид:

$$- \overline{F_{yc} V_{yc}} = m^* \overline{V_{yc} \frac{d(v_{nc} \cos \vartheta)}{dt}} + \frac{\rho S}{2} \left[ C_{yc}^\alpha \overline{v_{nc} V_{xc} V_{yc}} + \left( C_{yc}^{\dot{\alpha}} - \frac{2m^*}{\rho S b} \right) \overline{b \dot{v}_{nc} V_{yc} \cos \theta_c} - \overline{C_{yc}^{\omega_z} \omega_z b V_{xc} V_{yc}} - \overline{C_{yc}^{\dot{\omega}_z} \dot{\omega}_z b^2 V_{yc} \cos \theta_c} \right] + \overline{X_{ic} V_{yc} \sin \vartheta} + \frac{\rho S U_c^2 V_{yc}}{2} \overline{C \sin \vartheta} \quad (4)$$

$$- \overline{M_{zc} \omega_z} = \frac{\rho S b}{2} \left[ m_{zc}^\alpha \overline{\alpha_c \omega_z U_c^2} + m_{zc}^{\dot{\alpha}} \frac{\overline{\dot{\alpha}_c b \omega_z U_c^2}}{U_0} - m_{zc}^{\omega_z} \frac{\overline{\omega_z^2 b U_c^2}}{U_0} - m_{zc}^{\dot{\omega}_z} \frac{\overline{\dot{\omega}_z \omega_z b^2 U_c^2}}{U_0^2} \right]. \quad (5)$$

Черта сверху обозначает усреднение по времени.

Поясним величины, входящие в приведенные формулы.

$$V_{cx} = U_0 - \omega_z x \sin \vartheta, \quad (6)$$

$$V_{yc} = V_{y1} + \omega_z x \cos \vartheta, \quad (7)$$

где  $U_0$  – горизонтальная скорость крыла,  $\vartheta(t)$  – угол наклона крыла,  $V_{y1} = \dot{y}(t)$ ,  $\omega_z = \dot{\vartheta}(t)$ ,  $y(t)$  – вертикальные колебания крыла в точке  $x_1$  (точка, через которую проходит ось вращения крыла),  $X_{ic}$  – индуктивное сопротивление,  $x$  – расстояние от центра крыла до точки  $x_1$ .  $C_{yc}^\alpha$ ,  $C_{yc}^{\dot{\alpha}}$ ,  $C_{yc}^{\omega_z}$ ,  $C_{yc}^{\dot{\omega}_z}$ ,  $m_{zc}^\alpha$ ,  $m_{zc}^{\dot{\alpha}}$ ,  $m_{zc}^{\omega_z}$ ,  $m_{zc}^{\dot{\omega}_z}$  – коэффициенты гидродинамических производных [1],  $\rho$  – плотность жидкости,  $S$  – площадь одной стороны крыла,  $b$  – хорда,  $m^*$  – присоединенная масса крыла. Точка над буквой здесь и далее обозначает производную по времени.

В формулах (1)–(7) величины, которые пересчитаны к центру крыла, имеют индекс “с”. Угол наклона крыла не имеет индекса, так как он одинаков во всех точках крыла, в том числе и в точке  $x_1$ . Поэтому он определяется кинематическими па-

раметрами именно этой точки (мгновенным углом набегающего потока  $\theta$  и углом атаки  $\alpha$  в точке  $x_1$ ).

Аналогично соотношениям (6) и (7) выпишем выражения для других величин

$$v_{nc} = V_{y1} \cos \vartheta - U_0 \sin \vartheta + \omega_z x = U_c \sin \alpha_c, \quad (8)$$

$$\theta_c = \alpha_c + \vartheta = \arctg(V_{yc}/V_{xc}), \quad (9)$$

$$U_c^2 = V_{yc}^2 + V_{xc}^2, \quad (10)$$

где  $\alpha_c$  – угол атаки, пересчитанный к центру крыла.

Формулы (1)–(10) имеют общий вид и справедливы при любых кинематических параметрах и формах крыла. Они могут быть использованы для оценки тяги и КПД крыла численными методами, что очень громоздко и требует определенной квалификации в области вычислительной математики.

Для каждого конкретного набора кинематических параметров формулы (1) и (2) могут быть упрощены путем процедуры усреднения в каждом члене. В результате без большого труда можно

получить набор расчетных формул и с достаточной точностью использовать для оперативной оценки гидродинамических сил, развиваемых крылом, и коэффициента полезного действия.

Приведем эти формулы для случая, когда по гармоническому закону изменяются углы наклона и атаки крыла, тогда как линейные колебания совершаются по нелинейному закону:

$$\vartheta = \vartheta_0 \cos \omega t, \quad (11)$$

$$\alpha_c = \alpha_0 \cos \omega t. \quad (12)$$

Линейные колебания крыла в этом случае отличаются от чисто гармонических [18] и определяются из соотношения

$$\dot{y} = U_0 \operatorname{tg}(\vartheta + \alpha_c). \quad (13)$$

Формула (1) может быть представлена в виде выражения для коэффициента тяги:

$$C_T = \frac{2\overline{F_{xc}}}{\rho S U_0^2} = C_{T1} + C_{T2} + C_{T3} + C_{T4} + C_{T5} + C_{T6}. \quad (14)$$

Входящие в формулу (14) составляющие коэффициента тяги:

$$C_{T1} = C_{yc}^\alpha \left\{ \frac{\alpha_0}{2} \left( \theta_0 + 0.62\theta_0^3 + 0.32\theta_0^5 + 0.15\theta_0^7 + 0.07\theta_0^9 + \right. \right. \\ \left. \left. + 0.014\theta_0^{11} - 0.027\theta_0^{13} - 0.052\theta_0^{15} - 0.063\theta_0^{17} - 0.064\theta_0^{19} \right) + C_0 \right\}, \quad (15)$$

$$\text{где } C_0 = \frac{\vartheta_0^2 (Sh_0)^2 X^2}{2} \left( \begin{aligned} &1 + 0.25\alpha_0\theta_0 - 0.125\theta_0^2 - 0.021\alpha_0\theta_0^3 + 0.005\theta_0^4 - 0.001\alpha_0\theta_0^5 - \\ &- 0.001\alpha_0\theta_0^7 + 0.01\theta_0^{10} + 0.08\alpha_0\theta_0^{11} + 0.019\theta_0^{12} + 0.018\alpha_0\theta_0^{13} + \\ &+ 0.023\theta_0^{14} + 0.025\alpha_0\theta_0^{15} + 0.2\theta_0^{16} + 0.024\alpha_0\theta_0^{17} + 0.017\theta_0^{18} \end{aligned} \right), \quad (16)$$

$$C_{T2} = - \frac{\vartheta_0^2 (Sh_0)^2 X}{2} \left( C_{yc}^{\dot{\alpha}} - \frac{2m^*}{\rho S b} \right) \left( \begin{aligned} &1 - 0.125\vartheta_0^2 + 0.0052\vartheta_0^4 - \frac{\alpha_0\vartheta_0}{4} (1 - 0.0833\vartheta_0^2 + 0.0024\vartheta_0^4) - \\ &- \frac{\alpha_0\theta_0^2}{4\vartheta_0} \left( \begin{aligned} &1 + 0.1664\theta_0^2 + 0.0415\theta_0^4 + 0.012\theta_0^6 + 0.0036\theta_0^8 - \\ &- 0.25\vartheta_0^2 - 0.052\vartheta_0^2\theta_0^2 - 0.0144\vartheta_0^2\theta_0^4 - 0.0044\vartheta_0^2\theta_0^6 + \\ &+ 0.0128\vartheta_0^4 + 0.03\vartheta_0^4\theta_0^2 + 0.009\vartheta_0^4\theta_0^4 \end{aligned} \right) \end{aligned} \right), \quad (17)$$

$$C_{T3} = - C_{yc}^{\omega_z} \frac{C_0}{X}, \quad (18)$$

$$C_{T4} = - C_{yc}^{\dot{\omega}_z} \left\{ -(Sh_0)^2 \vartheta_0^2 \left[ 0.5 + 0.0625\vartheta_0^2 + 0.0026\vartheta_0^4 + \frac{\alpha_0}{\vartheta_0} (0.5 - 0.1875\vartheta_0^2 + 0.058\vartheta_0^4) \right] \right\}, \quad (19)$$

$$C_{T5} = - \frac{\pi}{2} \left[ \frac{\alpha_0^2}{2} \left( \begin{aligned} &1 + 0.375\theta_0^2 + 0.13\theta_0^4 + 0.046\theta_0^6 + 0.017\theta_0^8 - 0.006\theta_0^{10} - \\ &- 0.031\theta_0^{12} - 0.043\theta_0^{14} - 0.046\theta_0^{16} - 0.043\theta_0^{18} \end{aligned} \right) + C_0 \right], \quad (20)$$

$$C_{T6} = - C \left[ \left( 1 + 0.5\alpha_0\theta_0 + 0.25\theta_0^2 + 0.31\alpha_0\theta_0^3 + 0.078\theta_0^4 + 0.16\alpha_0\theta_0^5 + 0.026\theta_0^6 \right) + C_0 \right]. \quad (21)$$

Получим формулы для чисто линейных и угловых колебаний.

Для линейных колебаний ( $\vartheta = 0$ ):

$$C_{T1} = C_{yc}^\alpha \left\{ \frac{\alpha_0^2}{2} \left( 1 + 0.62\alpha_0^2 + 0.32\alpha_0^4 + 0.15\alpha_0^6 + 0.07\alpha_0^8 \right) \right\}, \quad (22)$$

$$C_0 = C_{T2} = C_{T3} = C_{T4} = 0, \quad (23)$$

$$C_{T5} = - \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{\alpha_0^2}{2} \left( 1 + 0.375\alpha_0^2 + 0.13\alpha_0^4 + 0.046\alpha_0^6 + 0.017\alpha_0^8 \right) \right\}, \quad (24)$$

$$C_{T6} = -C(1 + 0.75\alpha_0^2 + 0.388\alpha_0^4 + 0.186\alpha_0^6 + 0.106\alpha_0^8). \quad (25)$$

Для угловых колебаний ( $y = 0, \dot{y} = 0, \theta = 0, \vartheta = -\alpha$ ):

$$C_{T1} = C_{yc}^\alpha \{C_0\}, \quad (26)$$

$$C_0 = \frac{\vartheta_0^2 (Sh_0)^2 X^2}{2}, \quad (27)$$

$$C_{T2} = -\frac{\vartheta_0^2 (Sh_0)^2 X}{2} \left( C_{yc}^\alpha - \frac{2m^*}{\rho Sb} \right) \left[ \frac{1 - 0.125\vartheta_0^2 + 0.0052\vartheta_0^4 - \frac{\alpha_0 \vartheta_0}{4} (1 - 0.0833\vartheta_0^2 + 0.0024\vartheta_0^4)}{1 - 0.125\vartheta_0^2 + 0.0052\vartheta_0^4 - \frac{\alpha_0 \vartheta_0}{4} (1 - 0.0833\vartheta_0^2 + 0.0024\vartheta_0^4)} \right], \quad (28)$$

$$C_{T3} = -C_{yc}^{\omega_z} \frac{C_0}{X}, \quad (29)$$

$$C_{T4} = -C_{yc}^{\omega_z} \left\{ -(Sh_0)^2 \vartheta_0^2 \left[ 0.5 + 0.0625\vartheta_0^2 + 0.026\vartheta_0^4 + \frac{\alpha_0}{\vartheta_0} (0.5 - 0.1875\vartheta_0^2 + 0.0586\vartheta_0^4) \right] \right\}, \quad (30)$$

$$C_{T5} = -\frac{\pi}{2} \left[ \frac{\alpha_0^2}{2} + C_0 \right], \quad (31)$$

$$C_{T6} = -C \left[ 1 + \frac{(Sh_0)^2 \vartheta_0^2 X^2}{2} \right]. \quad (32)$$

Здесь и далее введены обозначения  $Sh_0 = \frac{\omega b}{U_0}$  – число Струхала,  $\lambda_p = \frac{U_0}{\omega y_0}$ ,  $C = 2(C_f + C_p)$ ,  $C_f, C_p$  – коэффициенты трения и формы крыла соответственно,  $X = \frac{x}{b}$ .

Получим расчетные формулы для коэффициента мощности. Выражение (2) с учетом (4) и (5) может быть представлено в виде:

$$C_P = \frac{2\bar{P}_c}{\rho S_2 U_0^3} = C_{P1} + C_{P2} + C_{P3} + C_{P4} + C_{P5} + C_{P6} + C_{P7} + C_{P8} + C_{P9} + C_{P10} + C_{P11}. \quad (33)$$

Входящие в формулу (33) коэффициенты мощности имеют вид:

$$C_{P1} = m^* \frac{2(Sh_0)^2 \vartheta_0^2 X}{\rho Sb} \left[ \begin{aligned} & -0.5 + 0.3125\vartheta_0^2 - 0.1\vartheta_0^4 + 0.0125\vartheta_0^6 - \\ & -\frac{1}{\vartheta_0} \left( 0.5\vartheta_0 + 0.125\vartheta_0^3 + 0.0417\vartheta_0^5 - 0.1875\vartheta_0^2\vartheta_0 - \right. \\ & \left. - 0.0521\vartheta_0^2\vartheta_0^3 - 0.0182\vartheta_0^2\vartheta_0^5 \right) \\ & - 0.375\vartheta_0\vartheta_0 - 0.0624\vartheta_0\vartheta_0^3 - 0.0156\vartheta_0\vartheta_0^5 + 0.1562\vartheta_0^3\vartheta_0 + \\ & + 0.0326\vartheta_0^3\vartheta_0^3 + 0.01\vartheta_0^3\vartheta_0^5 - 0.0326\vartheta_0^5\vartheta_0 - 0.0076\vartheta_0^5\vartheta_0^3 + \\ & + \frac{\theta_0}{\vartheta_0} \left( 0.5 - 0.1875\vartheta_0^2 + 0.0469\vartheta_0^4 - 0.125\vartheta_0^2 - 0.0938\vartheta_0^2\vartheta_0^2 + \right. \\ & \left. + 0.0293\vartheta_0^4\vartheta_0^2 - 0.0156\vartheta_0^4 + 0.0146\vartheta_0^2\vartheta_0^4 - 0.0051\vartheta_0^4\vartheta_0^4 \right) \end{aligned} \right], \quad (34)$$

$$C_{P2} = C_{yc}^\alpha \theta_0 \left\{ \begin{aligned} & 0.5\theta_0 + 0.25\theta_0^3 + 0.118\theta_0^7 + 0.0463\theta_0^7 - 0.1875\vartheta_0^2\theta_0 - \\ & - 0.1042\vartheta_0^2\theta_0^3 - 0.0516\vartheta_0^2\theta_0^5 - 0.5\vartheta_0 - 0.125\vartheta_0\theta_0^2 - 0.0417\vartheta_0\theta_0^4 - \\ & - 0.0061\vartheta_0\theta_0^6 + 0.0625\vartheta_0^3 + 0.0174\vartheta_0^3\theta_0^2 - \\ & - \frac{(Sh_0)^2 \vartheta_0^2 X^2}{\theta_0} \left[ \begin{aligned} & -0.5 + 0.0625\vartheta_0^2 + 0.25\vartheta_0\theta_0 + 0.0417\vartheta_0\theta_0^3 + 0.104\vartheta_0\theta_0^5 - \\ & - 0.0833\vartheta_0^3\theta_0 - 0.0174\vartheta_0^3\theta_0^3 - 0.0049\vartheta_0^3\theta_0^5 + 0.0163\vartheta_0^5\theta_0 + \\ & + 0.0038\vartheta_0^5\theta_0^3 - 0.125\vartheta_0^2 + 0.0521\vartheta_0^4 - 0.0076\vartheta_0^6 \end{aligned} \right] \end{aligned} \right\}, \quad (35)$$

$$C_{P3} = \left( C_{yc}^{\alpha} - \frac{2m^*}{\rho SB} \right) (Sh_0)^2 \vartheta_0^2 X \begin{pmatrix} -0.5 + 0.1875\vartheta_0^2 - 0.0521\vartheta_0^4 + 0.0076\vartheta_0^6 - \\ -0.125\vartheta_0\theta_0 - 0.0104\vartheta_0^3\theta_0 + 0.0625\vartheta_0^5\theta_0 - \\ -0.0195\vartheta_0^5\theta_0 - 0.013\vartheta_0^3\theta_0^3 + 0.0046\vartheta_0^5\theta_0^3 + 0.0091\vartheta_0^3\theta_0^5 \end{pmatrix}, \quad (36)$$

$$C_{P4} = -C_{yc}^{\omega_z} \left[ - (Sh_0)^2 \vartheta_0^2 X \begin{pmatrix} -0.5 + 0.0625\vartheta_0^2 + 0.125\vartheta_0\theta_0 + 0.0208\vartheta_0\theta_0^3 + 0.0052\vartheta_0\theta_0^5 - \\ -0.0104\vartheta_0^3\theta_0 - 0.0022\vartheta_0^3\theta_0^3 \end{pmatrix} \right], \quad (37)$$

$$C_{P5} = -C_{yc}^{\omega_z} \left\{ (Sh_0)^2 \vartheta_0 \left[ \vartheta_0(-0.5 + 0.0625\vartheta_0^2) + \alpha_0(-0.5 + 0.1875\vartheta_0^2) + \right] \right. \\ \left. + (Sh_0)^2 \vartheta_0^3 X^2 (0.125 - 0.0287\vartheta_0^2 + 0.0033\vartheta_0^4) \right\}, \quad (38)$$

$$C_{P6} = \frac{\pi}{2} \left\{ \begin{array}{l} 0.375\vartheta_0\theta_0^3 + 0.313\vartheta_0\theta_0^5 + 0.2005\vartheta_0\theta_0^7 + 0.0911\vartheta_0\theta_0^9 + \\ + 0.375\vartheta_0^3\theta_0 - 0.2604\vartheta_0^3\theta_0^3 - 0.2826\vartheta_0^3\theta_0^5 - 0.205\vartheta_0^3\theta_0^7 - \\ - 0.1563\vartheta_0^5\theta_0 + 0.0683\vartheta_0^5\theta_0^3 + 0.0861\vartheta_0^5\theta_0^5 + 0.0664\vartheta_0^5\theta_0^7 - \\ - 0.75\vartheta_0^2\theta_0^2 - 0.4166\vartheta_0^2\theta_0^4 - 0.0296\vartheta_0^2\theta_0^6 - 0.0656\vartheta_0^2\theta_0^8 + \\ + 0.5208\vartheta_0^4\theta_0^2 + 0.3038\vartheta_0^4\theta_0^4 + 0.1548\vartheta_0^4\theta_0^6 + 0.0502\vartheta_0^4\theta_0^8 - \\ - 0.1064\vartheta_0^6\theta_0^2 - 0.0638\vartheta_0^6\theta_0^4 - 0.0332\vartheta_0^6\theta_0^6 - 0.0104\vartheta_0^6\theta_0^8 + \\ + (Sh_0)^2 \vartheta_0^2 X^2 \begin{pmatrix} 0.375\vartheta_0\theta_0 + 0.0625\vartheta_0\theta_0^3 + 0.0156\vartheta_0\theta_0^5 - \\ - 0.1562\vartheta_0^3\theta_0 - 0.0326\vartheta_0^3\theta_0^3 - 0.0086\vartheta_0^3\theta_0^5 + \\ + 0.0326\vartheta_0^5\theta_0 + 0.0076\vartheta_0^5\theta_0^3 + 0.0022\vartheta_0^5\theta_0^5 - \\ - 0.24\vartheta_0^2 + 0.1042\vartheta_0^4 - 0.0152\vartheta_0^6 \end{pmatrix} \end{array} \right\}, \quad (39)$$

$$C_{P7} = C \begin{pmatrix} 0.5\vartheta_0\theta_0 + 0.5\vartheta_0\theta_0^3 + 0.3542\vartheta_0\theta_0^5 + 0.2066\vartheta_0\theta_0^7 - \\ - 0.0625\vartheta_0^3\theta_0 - 0.0695\vartheta_0^3\theta_0^3 - 0.0517\vartheta_0^3\theta_0^5 - 0.031\vartheta_0^3\theta_0^7 \end{pmatrix}, \quad (40)$$

$$C_{P8} = m_{zc}^{\alpha} (Sh_0)^2 \vartheta_0^2 X (0.5 + 0.0625\vartheta_0^2 + 0.013\vartheta_0^4 - 0.0016\vartheta_0^6), \quad (41)$$

$$C_{P9} = m_{zc}^{\alpha} (Sh_0)^2 \alpha_0 \vartheta_0 (0.5 + 0.125\vartheta_0^2 + 0.0417\vartheta_0^4 + 0.0148\vartheta_0^6 + 0.0036\vartheta_0^8), \quad (42)$$

$$C_{P10} = -m_{zc}^{\omega_z} (Sh_0)^2 \vartheta_0^2 (0.5 + 0.125\vartheta_0^2 + 0.0417\vartheta_0^4 + 0.0148\vartheta_0^6 + 0.0036\vartheta_0^8), \quad (43)$$

$$C_{P11} = -m_{zc}^{\omega_z} \frac{(Sh_0)^4 \vartheta_0^4 X}{4} \begin{pmatrix} 1 - 0.0833\vartheta_0^2 - \frac{\theta_0}{\vartheta_0} - 0.1668 \frac{\theta_0^3}{\vartheta_0} - \\ - 0.0417 \frac{\theta_0^5}{\vartheta_0} + 0.25\vartheta_0\theta_0 + 0.052\vartheta_0\theta_0^3 \end{pmatrix}. \quad (44)$$

Получим формулы для чисто линейных и угловых колебаний.

Для линейных колебаний:

$$C_{P1} = C_{P3} = C_{P4} = C_{P5} = C_{P6} = C_{P7} = C_{P8} = C_{P9} = C_{P10} = C_{P11} = 0, \quad (45)$$

$$C_{P2} = C_{yc}^{\alpha} \alpha_0^2 \{0.5 + 0.25\alpha_0^2\}. \quad (46)$$

Для угловых колебаний ( $y = 0, \dot{y} = 0, \theta = 0, \vartheta = -\alpha$ ):

$$C_{P1} = m^* \frac{2(Sh_0)^2 \vartheta_0^2 X}{\rho Sb} [-0.5 + 0.3125\vartheta_0^2 - 0.1\vartheta_0^4 + 0.0125\vartheta_0^6], \quad (47)$$

$$C_{P2} = C_{yc}^{\alpha} \left\{ -(Sh_0)^2 \vartheta_0^2 X^2 [-0.5 + 0.0625\vartheta_0^2] \right\}, \quad (48)$$

$$C_{P3} = \left( C_{yc}^{\ddot{\alpha}} - \frac{2m^*}{\rho S b} \right) (Sh_0)^2 \vartheta_0^2 X \left( -0.5 + 0.1875 \vartheta_0^2 - 0.0521 \vartheta_0^4 + 0.0076 \vartheta_0^6 \right), \quad (49)$$

$$C_{P4} = C_{yc}^{\omega_z} \left[ (Sh_0)^2 \vartheta_0^2 X \left( -0.5 + 0.0625 \vartheta_0^2 \right) \right], \quad (50)$$

$$C_{P5} = -C_{yc}^{\dot{\omega}_z} \left\{ (Sh_0)^2 \vartheta_0 \left[ \left( -0.125 \vartheta_0 + (Sh_0)^2 \vartheta_0^3 X^2 (0.125 - 0.0287 \vartheta_0^2 + 0.0033 \vartheta_0^4) \right) \right] \right\}, \quad (51)$$

$$C_{P6} = \frac{\pi}{2} \left\{ (Sh_0)^2 \vartheta_0^2 X^2 \left( -0.25 \vartheta_0^2 + 0.1042 \vartheta_0^4 - 0.0152 \vartheta_0^6 \right) \right\}, \quad (52)$$

$$C_{P7} = 0, \quad (53)$$

$$C_{P8} = \frac{m_{zc}^{\alpha} (Sh_0)^2 \vartheta_0^2 X}{2}, \quad (54)$$

$$C_{P9} = \frac{m_{zc}^{\dot{\alpha}} (Sh_0)^2 \alpha_0 \vartheta_0}{2}, \quad (55)$$

$$C_{P10} = -\frac{m_{zc}^{\omega_z} (Sh_0)^2 \vartheta_0^2}{2}, \quad (56)$$

$$C_{P11} = -m_{zc}^{\dot{\omega}_z} \frac{(Sh_0)^4 \vartheta_0^4 X}{4} \left( 1 - 0.0833 \vartheta_0^2 \right). \quad (57)$$

Применим полученные формулы к оценке коэффициентов тяги и полезного действия, развиваемых жестким прямоугольным крылом с удлинением, равным 5, экспериментально исследованным ранее [18]. Кинематические параметры крыла следующие: ось вращения проходит на расстоянии 1/3 хорды от передней кромки (в этом случае безразмерная координата  $X = -1/6$ ), диапазон максимальных значений угла атаки от  $10^\circ$  до  $30^\circ$ , диапазон чисел Струхала от 0.15 до 0.45, отношение амплитуды линейных колебаний к хорде крыла  $\frac{h_0}{b} = 0.75$ ,  $U_0 = 0.4$  м/с,  $C = 0.028$  [16]. Выражение для присоединенной массы крыла принято в форме  $m^* = \frac{0.9 \rho l \pi b^2}{2}$ , где  $l$  – полуразмах крыла.

Для числа Струхала в упомянутой работе принято выражение:

$$St = \frac{2h_0 f}{U_0}. \quad (58)$$

Это выражение отличается от принятого в нашей работе и находится с ним в соотношении:

$$St = \frac{h_0 (Sh_0)}{b \pi}. \quad (59)$$

В расчетные формулы (21)–(27) входят углы  $\alpha_0$ ,  $\vartheta_0$ , а также их сумма  $\theta_0$ . В эксперименте известны только значения углов атаки, при которых проводились измерения. Остальные два угла мо-

гут быть найдены из соотношения (13). Разложим правую часть этого соотношения в ряд Маклорена и ограничимся первыми четырьмя членами. После почленного интегрирования полученного ряда в пределах от 0 до  $\pi/2$  получим следующее соотношение, связывающее число  $St$  и суммарный угол  $\theta_0$ :

$$\pi(St) = \theta_0 \left( 1 + 0.222 \theta_0^2 + 0.071 \theta_0^4 + 0.0247 \theta_0^6 \right). \quad (60)$$

В табл. 1 приведены вычисленные величины угла  $\theta_0$  для значений числа  $St$ , использованных в эксперименте, и видно, что при  $St = 0.45$   $\theta_0 > 1$  и расчетные формулы могут приводить к значительной погрешности.

**Таблица 1.** Рассчитанные значения суммарного угла

$St$	$\theta_0$ , рад
0.15	0.45
0.25	0.7
0.35	0.891
0.45	1.043

На рис. 1 показаны результаты измерения коэффициентов тяги, на рис. 2 – коэффициентов полезного действия в зависимости от угла атаки [18]. На тех же рисунках представлены результаты вычислений по приведенным выше формулам.

Анализируя данные, представленные на рисунках, можно сделать следующий вывод: рассчитанные по формулам значения хорошо согласуются с измеренными при значениях угла атаки до 20–25 град. Следовательно, полученные результаты еще раз подтверждают эффективность применения разработанных методов расчета гидродинамических характеристик крыла в достаточно широком диапазоне изменения амплитуд линейных и угловых колебаний крыла и чисел Струхала.

Расхождение результатов с увеличением угла атаки ( $\alpha_0 > 20$ –25 град) объясняется тем, что формулы получены в предположении малости угла атаки. Заметнее всего отличия при наибольших значениях числа Струхала. Причина этого объяснена выше ( $\theta_0 > 1$ ).

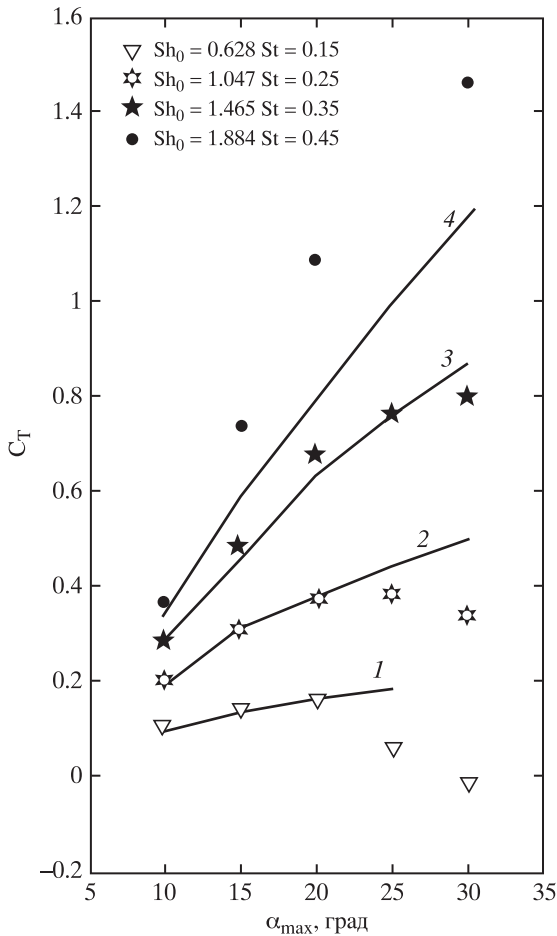


Рис. 1. Сравнение измеренных значений коэффициента тяги (значки разной формы) и значений, вычисленных по формулам (линии 1–4).

При выполнении расчетов были использованы известные решения для коэффициентов аэродинамических производных, представленные ранее [1, 2]. Однако ряд выполненных при расчетах операций требуют дополнительного пояснения.

В линейном приближении значения коэффициентов аэродинамических производных и присоединенная масса определяются формой крыла и числом Струхалья. При расчетах составляющих гидродинамических сил использованы значения для коэффициентов аэродинамических производных первого порядка, которые табулированы в широком интервале чисел Струхалья для четырех типов крыльев: бесконечного, прямоугольного, треугольного и кольцевого [1, 2]. Однако они представлены для удлинений крыла, не превышающих 4. А в эксперименте, описанном ранее, удлинение крыла близко к 5 [18]. Значения производных для удлинения 5 было получено путем экстраполяции.

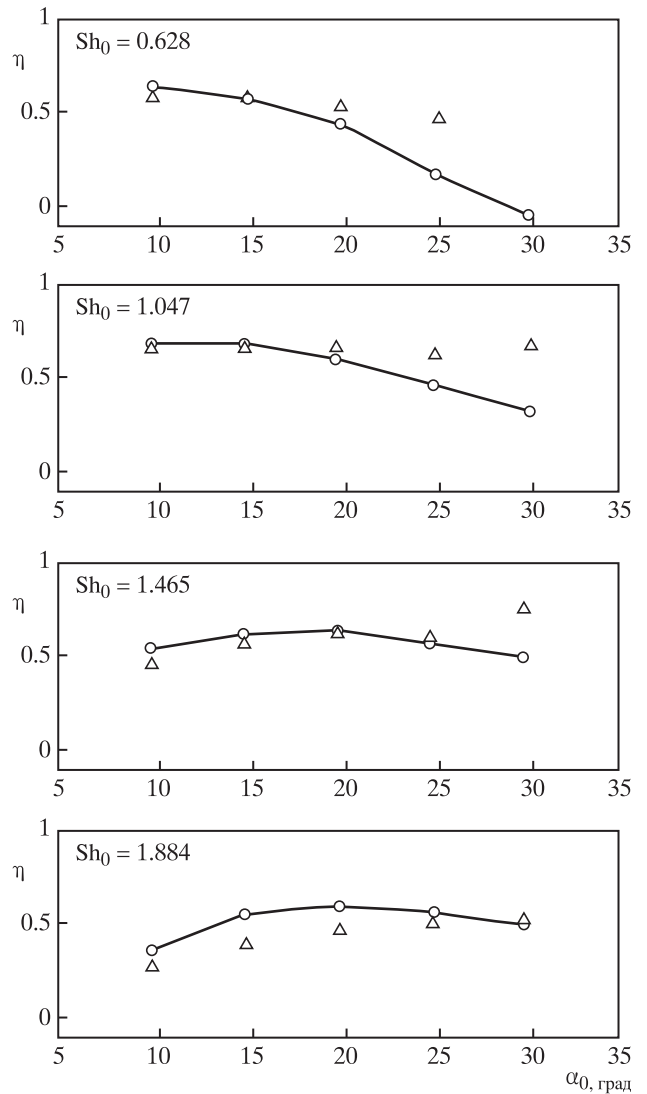


Рис. 2. Сравнение измеренных значений коэффициентов полезного действия (круглые значки) и значений, вычисленных по формулам (треугольники).

В работе Белоцерковского [1] коэффициенты аэродинамических производных рассчитаны для точки крыла, отстоящей от передней кромки на четверть хорды, а в расчетные формулы (21)–(27) входят величины, пересчитанные к центру крыла. Поэтому коэффициенты аэродинамических производных необходимо было пересчитать к центру. Методика такого пересчета подробно описана ранее [1]. Формулы пересчета выглядят следующим образом:  $C_{yc}^\alpha = C_y^\alpha$ ,  $C_{yc}^{\dot{\alpha}} = C_y^{\dot{\alpha}}$ ,  $C_{yc}^{\omega_z} = C_y^{\omega_z} + C_y^\alpha \xi_0$ ,  $C_{yc}^{\dot{\omega}_z} = C_y^{\dot{\omega}_z} + C_y^{\dot{\alpha}} \xi_0$ ,  $m_{zc}^\alpha = m_y^\alpha - C_y^\alpha \xi_0$ ,  $m_{zc}^{\dot{\alpha}} = m_k^{\dot{\alpha}} - C_y^{\dot{\alpha}} \xi_0$ ,  $m_{zc}^{\omega_z} = m_k^{\omega_z} - (C_y^{\omega_z} - m_z^\alpha) \xi_0 - C_y^\alpha \xi_0^2$ ,  $m_{zc}^{\dot{\omega}_z} = m_k^{\dot{\omega}_z} - (C_y^{\dot{\omega}_z} - m_z^{\dot{\alpha}}) \xi_0 - C_y^{\dot{\alpha}} \xi_0^2$ . Здесь  $\xi_0 = -0.25$ .

**Таблица 2.** Коэффициенты аэродинамических производных для крыла с удлинением 5, пересчитанные к центру

$St$	$Sh_0$	$Sh$	$C_{yc}^\alpha$	$C_{yc}^{\dot{\alpha}}$	$C_{yc}^{\omega_z}$	$C_{yc}^{\dot{\omega}_z}$	$m_{zc}^\alpha$	$m_{zc}^{\dot{\alpha}}$	$m_{zc}^{\omega_z}$	$m_{zc}^{\dot{\omega}_z}$
0.15	0.628	0.568	3.348	0.45	0.873	-0.259	0.901	-0.239	-0.128	-0.112
0.25	1.047	0.8	3.202	0.665	0.843	-0.202	0.863	-0.184	-0.136	-0.1
0.35	1.465	0.921	3.082	0.777	0.828	-0.173	0.844	-0.153	-0.139	-0.095
0.45	1.884	0.949	2.985	0.803	0.824	-0.166	0.837	-0.149	-0.143	-0.093

Еще одна особенность при проведении расчетов касается учета зависимости коэффициентов гидродинамических производных от числа Струхала. Коэффициенты производных в данном случае определялись по числу Струхала, имеющему вид  $Sh = \frac{(Sh_0)\lambda_p}{\sqrt{\lambda_p^2 + 1}}$ , а не по значениям  $Sh_0 = \frac{\omega b}{U_0}$ .

Целесообразность использования числа Струхала указанного вида для расчета гидродинамических характеристик крыла в случае больших амплитуд линейных и угловых колебаний уже демонстрировалась [6, 7, 20]. Такой прием позволяет в какой-то степени учесть нелинейность вихревого следа за крылом и снизить нарастание ошибок расчета рассматриваемых характеристик крыла с увеличением чисел Струхала. В табл. 2 представлены пересчитанные значения коэффициентов для значений числа Струхала, использованных в эксперименте.

Авторы выражают искреннюю благодарность Р.И. Герасимовой за помощь в подготовке рисунков.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-04-00358а).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоцерковский С.М. // Тр. ЦАГИ. 1958. Вып. 725. С. 5.
2. Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К., Табачников В.Г. Крыло в нестационарном потоке газа. М.: Наука, 1971. 768 с.
3. Горелов Д.Н. Методы решения плоских краевых задач теории крыла. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000. 215 с.
4. Зайцев А.А., Федотов А.А. // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1986. № 5. С. 75.
5. Пушков С.Г., Романенко Е.В. // Успехи соврем. биологии. 2000. Т. 120. № 2. С. 207.
6. Пушков С.Г., Романенко Е.В., Лопатин В.Н. // Успехи соврем. биологии. 2006. Т. 126. № 3. С. 318.
7. Пушков С.Г., Романенко Е.В., Лопатин В.Н. // Успехи соврем. биологии. 2009. Т. 129. № 1. С. 104.
8. Романенко Е.В. Гидродинамика рыб и дельфинов. М.: КМК, 2001. 412 с.
9. Романенко Е.В., Пушков С.Г. // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2011. Т. 4. № 1. С. 69.
10. Романенко Е.В., Пушков С.Г., Лопатин В.Н. // Успехи соврем. биологии. 2005. Т. 125. №5. С. 478.
11. Романенко Е.В., Пушков С.Г., Лопатин В.Н. // Успехи соврем. биологии. 2007. Т. 127. № 3. С. 299.
12. Федотов А.А. Исследование обтекания идеальной жидкостью тонкого крыла конечного размаха, колеблющегося с большой амплитудой: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: Моск. авиационный ин-т, 1987. 17 с.
13. Шеховцов А.В. // Прикладна гідромеханіка. 1999. Т. 1(73). № 2. С. 71.
14. Anderson J.M., Streitlien K., Batter D.S., Triantafyllou M.S. // J. Fluid Mech. 1998. V. 360. P. 41.
15. Garrick I.E. // Propulsion of a flapping and oscillating airfoil. NACA Report. 1936. V. 567. P. 419.
16. Heathcote S., Gursul I. // AIAA J. 2007. V. 45. N 5. P. 1066.
17. Pedro G., Suleman A., Djilali N. // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2003. V. 42. P. 493.
18. Prempraneerach P., Hover F.S., Triantafyllou M.S. // Pros. 13<sup>th</sup> Int. Symp. Unmanned Untethered Submersible Techn. Durham, NH, Aug. 24–27, 2003. С. 1.
19. Hover F.S., Haugsdal O., Triantafyllou M.S. // J. Fluids Structures. 2004. № 19. P. 37.
20. Romanenko E.V. Fish and Dolphin Swimming. Sofia–Moscow: Pensoft, 2002. 430 p.
21. Yang Shuchi, Shijun Luo, Feng Liu, Her-Mann Tsai // The AIAA 43<sup>rd</sup> Aerospace Sciences Meeting, Reno, NV, Jan., 2005. С. 1.
22. Young J., Lai J.C.S., Kaya M., Tuncer I.E. // 3<sup>rd</sup> International Conference on Computational Fluid Dynamics (ICCFD3), Toronto, July 2004. С. 313.



## **Hydrodynamic Forces Exerted by Wing as a Function of the Pitch-Axes Location, Thrust, Power and Efficiency under Harmonic Changes in Pitch and Attack Angles**

**E. V. Romanenko<sup>1</sup>, S. G. Pushkov<sup>2</sup>, V. N. Lopatin<sup>1</sup>**

*<sup>1</sup>Severtsov Institute of Ecology and Evolution, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

*<sup>2</sup>Gromov Flight Research Institute, Ministry of Aviation Industry, Moscow oblast, Russia*

Approximate expressions for hydrodynamic forces were used to construct a mathematical model of flat rigid wing of different shape and aspect ratio when the pitch-axes vary and heaving and pitching amplitudes are rather high. A specific feature of this model is the use of derivative aerodynamic coefficients of the first order and kinematic parameters. Some formulas were elaborated to calculate thrust, power, and efficiency when the pitch angle and angle of attack harmonically vary. The results of calculations well agree with known experimental results.