УСПЕХИ СОВРЕМЕННОЙ БИОЛОГИИ, 2012, том 132, № 6, с. 611–624

УДК 577.31

# ИНДУКТИВНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ЖЕСТКОГО КРЫЛА ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ И УГЛЕ АТАКИ

© 2012 г. Е.В. Романенко[1], С.Г. Пушков[2], В.Н. Лопатин[1]

[1]*Институт проблем экологии и эволюции им. А.Н. Северцова РАН, Москва*
[2]*Летно-исследовательский институт им. М.М. Громова, Московская обл.*
*E-mail: evromanenko33@mail.ru*

Выполнены оценки индуктивного сопротивления плоского и жесткого крыла, совершающего гармонические колебания достаточно большой амплитуды при произвольном положении оси вращения. В плоской задаче получены аналитические выражения для составляющих индуктивного сопротивления через коэффициенты гидродинамических производных при гармонических изменениях угла атаки.

*Ключевые слова*: индуктивное сопротивление, коэффициент тяги, коэффициент мощности, жесткое крыло, моделирование.

Ранее (Пушков, Романенко, 2000; Пушков и др., 2006; Романенко, Пушков, 1998; Романенко, Пушков, 2008; Романенко и др., 2005; Романенко и др., 2007; Romanenko, 2002) были получены расчетные формулы для оценки гидродинамических сил, развиваемых жестким крылом, колеблющимся в невязкой жидкости с произвольными амплитудами линейных и угловых колебаний и произвольным положением оси вращения. В этих формулах составляющая гидродинамических сил, обусловленная индуктивным сопротивлением крыла, определялась оценкой “сверху”, т.е. по максимуму:

$$X_i \le \frac{\rho\pi S v_n^2}{4}, \tag{1}$$

где $S$ – площадь крыла, $v_n$ – нормальная скорость крыла. Коэффициент индуктивного сопротивления определяется выражением

$$C_{Xi} = \frac{\pi}{2U_0^2} v_n^2. \tag{2}$$

Показано, что выражения (1) и (2) являются достаточным приближением при расчетах пропульсивных характеристик в случаях умеренных удлинений крыла $2 \le \lambda \le 5$ или когда доля индуктивного сопротивления мала в общем балансе гидродинамических сил. Вместе с тем остаются вопросы погрешности используемой оценки в зависимости от формы крыла и кинематики движения. В работе (Пушков и др., 2009) получены расчетные формулы для индуктивного сопротивления крыла при гармонических изменениях его угла наклона.

В этой работе мы получим расчетные формулы для случая гармонических изменений угла атаки крыла.

В данном случае, если движение крыла можно представить в виде основного движения со скоростью $U_0$ и наложенного на него добавочного движения с малыми перемещениями и скоростями, общие выражения для проекции гидродинамических сил могут быть представлены в виде (Некрасов, 1947; Романенко, 2001; Седов, 1966):

$$\begin{aligned} Y &= -\lambda_{22}\frac{dv_n}{dt} - \rho U_0 \Gamma \\ X &= \lambda_{22} v_n \omega_z + \rho v_n \Gamma - \rho\pi b u_*(v_n - u_*). \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $\Gamma = \pi b\left(v_n - \frac{b\omega_z}{4} - u_*\right)$ – присоединенная циркуляция (Пушков, Романенко, 2000), $u_*$ – эффективная вызванная скорость, обусловленная наличием за крылом вихревой пелены, $b$ – хорда крыла, $v_n$ – нормальная скорость крыла, $\rho$ – плотность среды, $\lambda_{22}$ – присоединенная масса крыла, $\omega_z$ – угловая скорость крыла.

Нас интересует третий член для проекции гидродинамической силы $X$ в выражении (3):

$$X_i = \rho\pi b u_*(v_n - u_*), \tag{4}$$

рассматриваемый как индуктивное сопротивление.

Следует отметить, что $X_i$ по существу является лишь составляющей индуктивного сопротивления, если его определять выражением

$$X_i^* = \rho\pi b u_* \left( v_n - \frac{\omega_z b}{4} - u_* \right) = \rho u_* \Gamma.$$

При определении рассматриваемой составляющей гидродинамических сил $X_i$ (4) (далее по тексту $X_i$ – индуктивное сопротивление) неизвестной величиной является скорость $u_*$. В случае установившегося или квазистационарного движения крыла конечного размаха порождение вихревого следа определяется, главным образом, конечностью размаха крыла. Скорость $u_*$, индуцируемая вихревым следом, по абсолютной величине меньше $v_n$. При этом для удлинений крыла $2 \le \lambda \le 5$ оценка индуктивного сопротивления сверху дает очень неплохие результаты.

В случае бесконечного удлинения крыла (рассматриваемая плоская задача) вихревой след порождается изменением циркуляции при наличии поперечных и угловых колебаний крыла. В данном случае значение $u_*$ может быть как больше, так и меньше $v_n$, соответственно $X_i$ может быть как отрицательным, так и положительным (напомним, что $X_i$ – лишь часть индуктивного сопротивления). Значение скорости $u_*$ в формуле (4) может быть определено из соотношения для подъемной силы (Пушков, Романенко, 2000)

$$Y = -\lambda_{22}\dot{v}_n - \rho U \Gamma = -\lambda_{22}\dot{v}_n - \rho U \pi b \left( v_n - \frac{\omega_z b}{4} - u_* \right), \tag{5}$$

и выражения для подъемной силы через коэффициенты гидродинамических производных (Белоцерковский, 1958):

$$Y = \frac{\rho U^2 b}{2} \left( -C_y^{\alpha} \frac{v_n}{U} - C_y^{\dot{\alpha}} \frac{\dot{v}_n b}{U^2} + C_y^{\omega_z} \frac{\omega_z b}{U} + C_y^{\dot{\omega}_z} \frac{\dot{\omega}_z b^2}{U^2} \right) \tag{6}$$

здесь $U$ – мгновенная скорость потока, набегающего на крыло, $\alpha$ – угол атаки. Точка над символом обозначает производную по времени.

Приравняем правые части выражений (5) и (6)

$$\frac{\rho U^2 b}{2} \left( -C_y^{\alpha} \frac{v_n}{U} - C_y^{\dot{\alpha}} \frac{\dot{v}_n b}{U^2} + C_y^{\omega_z} \frac{\omega_z b}{U} + C_y^{\dot{\omega}_z} \frac{\dot{\omega}_z b^2}{U^2} \right) = -\lambda_{22}\dot{v}_n - \rho U \pi b \left( v_n - \frac{\omega_z b}{4} - u_* \right). \tag{7}$$

Из соотношения (7) получаем решение для $u_*$ (Пушков и др., 2009):

$$u_* = v_n - \frac{v_n}{2\pi} C_y^{\alpha} + \frac{\omega_z b}{2\pi} C_y^{\omega_z} - \frac{\omega_z b}{4} + \frac{\lambda_{22}\dot{v}_n}{\rho\pi b U} - \frac{\dot{v}_n b}{2\pi U} C_y^{\dot{\alpha}} + \frac{\dot{\omega}_z b^2}{2\pi U} C_y^{\dot{\omega}_z}.$$

Здесь все параметры берутся в центре крыла. Для значений коэффициентов гидродинамических производных имеются известные решения (Белоцерковский, 1958).

Применим полученные соотношения для определения соответствующих составляющих силы тяги и мощности (членов, включающих индуктивное сопротивление) в случае гармонических изменений угла атаки крыла и его линейных колебаний.

Выражение для силы тяги крыла было получено ранее (Романенко, Пушков, 2008):

$$\overline{F_{xc}} = \frac{\rho S}{2} \left\{ C_{yc}^{\alpha} \overline{v_{nc} V_{yc}} + b \left( C_{yc}^{\dot{\alpha}} - \frac{2m^*}{\rho S b} \right) \overline{\dot{v}_{nc} \sin\theta_c} - C_{yc}^{\dot{\omega}_z} b^2 \overline{\dot{\omega}_z \sin\theta_c} - b C_{yc}^{\omega_z} b^2 \overline{\omega_z V_{yc}} - \overline{X_{ic} \cos\vartheta} - C \overline{U_c^2 \cos\vartheta} \right\}. \tag{8}$$

Здесь $m^* = \lambda_{22}$

Выражение (8) можно представить в форме коэффициентов тяги

$$C_T = C_{T1} + C_{T2} + C_{T3} + C_{T4} + C_{T5} + C_{T6}. \tag{9}$$

Для мощности получено следующее выражение

$$-\frac{2F_{yc}V_{yc}}{\rho S U_0^3} - \frac{2M_{zc}\omega_z}{\rho S U_0^3} = C_{P1} + C_{P2} + C_{P3} + C_{P4} + C_{P5} + C_{P6} + C_{P7} + C_{P8} + C_{P9} + C_{P10} + C_{P11},$$

где

$$-\overline{F_{yc} V_{yc}} = \lambda_{22} \overline{V_{yc} \frac{d(v_{nc}\cos\vartheta)}{dt}} + \frac{\rho S}{2} \left[ \begin{array}{l} C_{yc}^{\alpha} \overline{v_{nc} V_{cx} V_{yc}} + \left( C_{yc}^{\dot{\alpha}} - \dfrac{2\lambda_{22}}{\rho S b} \right) b \overline{\dot{v}_{nc} V_{yc} \cos\theta_c} - \\ - C_{yc}^{\omega_z} \overline{\omega_z b V_{xc} V_{yc}} - C_{yc}^{\dot{\omega}_z} \overline{\dot{\omega}_z b^2 V_{yc} \cos\theta_c} \end{array} \right] +,$$

$$+\overline{X_{ic}V_{yc}\sin\vartheta}+\frac{\overline{\rho SU_c^2V_{yc}}}{2}C\sin\vartheta$$

$$-\overline{M_{zc}\omega_z}=\frac{\rho Sb}{2}\left[m_{zc}^{\alpha}\overline{\alpha_c\omega_zU_c^2}+m_{zc}^{\dot\alpha}\frac{\overline{\dot\alpha_cb\omega_zU_c^2}}{U_0}-m_{zc}^{\omega_z}\frac{\overline{\omega_z^2bU_c^2}}{U_0}-m_{zc}^{\dot\omega_z}\frac{\overline{\dot\omega_z\omega_zb^2U_c^2}}{U_0^2}\right].$$

Здесь и далее $\overline{F}_{xc}$ – тяга, $F_{yc}$ – вертикальная сила, $M_{zc}$ – момент, $\lambda_{22}$ – присоединенная масса крыла, $v_{nc}$ – нормальная скорость, $\rho$ – плотность среды, $\theta_c$ – угол между набегающим на крыло потоком и горизонтальной осью, $C$ – коэффициент сопротивления крыла, $U_c$ – мгновенная скорость потока, набегающего на крыло, $X_{ic}$ – индуктивное сопротивление крыла, $b$ – хорда крыла, $S$ – его площадь (одной стороны). $C_{yc}^{\alpha}$, $C_{yc}^{\alpha'}$, $C_{yc}^{\omega_z}$, $C_{yc}^{\omega_z'}$, – аэродинамические производные, $m_{zc}^{\alpha}$, $m_{zc}^{\dot\alpha}$, $m_{zc}^{\omega_z}$, $m_{zc}^{\dot\omega_z}$ – производные момента (Белоцерковский, 1958). Наличие индекса “$c$” означает, что величины пересчитаны к центру крыла.

Одна из составляющих коэффициента тяги, включающая индуктивное сопротивление, имеет вид

$$C_{T5}=-\frac{\overline{2X_{ic}\cos\vartheta}}{\rho SU_0^2}. \quad (10)$$

Здесь и далее $\vartheta$ – угол наклона крыла к горизонтальной оси.

Отсюда получим, раскрыв выражение (10),

$$C_{T5}=-\frac{2\pi}{U_0^2}\left(\begin{matrix}D_1\overline{v_{nc}^2\cos\vartheta}+D_2\overline{v_{nc}\omega_z\cos\vartheta}+D_3\overline{\frac{v_{nc}\dot\omega_z}{U_c}\cos\vartheta}+D_4\overline{\frac{v_{nc}\dot v_{nc}}{U_c}\cos\vartheta}+D_5\overline{\frac{v_{nc}\omega_z}{U_c}\cos\vartheta}+\\ D_6\overline{\omega_z^2\cos\vartheta}+D_7\overline{\frac{\omega_z\dot\omega_z}{U_c}\cos\vartheta}+D_8\overline{\frac{\dot v_{nc}^2}{U_c^2}\cos\vartheta}+D_9\overline{\frac{\dot v_{nc}^2\dot\omega_z}{U_c^2}\cos\vartheta}+D_{10}\overline{\frac{\dot\omega_z^2}{U_c^2}\cos\vartheta}\end{matrix}\right). \quad (11)$$

Коэффициенты $2\pi D_1 - 2\pi D_{10}$ приведены в работе (Пушков и др., 2009).

Рассмотрим случай гармонических линейных колебаний бесконечного крыла и его угла атаки. В этом случае $y = y_0\sin\omega t$ и $\alpha = \alpha_0\cos\omega t$. (Фазовый сдвиг между линейными и угловыми колебаниями принят равным 90°). Входящие в выражение (11) переменные величины имеют вид

$$v_{nc}=V_{y1}\cos\vartheta-U_0\sin\vartheta+\omega_zx=\alpha_cU_c,$$

$$U_c^2=V_{yc}^2+V_{xc}^2,$$

$$V_{xc}=U_0-\omega_zx\sin\vartheta,$$

$$V_{yc}=V_{y1}+\omega_zx\cos\vartheta,$$

где $V_{y1}=\dot y(t)$, $\omega_z=\dot\vartheta(t)$, $y(t)$ – вертикальные колебания крыла. (Точка сверху над символом обозначает производную по времени). Угол наклона крыла к горизонтальной оси ($\vartheta$) определяется выражением

$$\vartheta=\theta_1-\alpha_1.$$

Угол наклона крыла не имеет индекса “с”, так как он одинаков во всех точках крыла, в том числе и в точке $x_1$ (см. рис. в работе (Пушков, Романенко, 2000)). Поэтому он определяется кинематическими параметрами именно этой точки (мгновенным углом набегающего потока $\theta_1$ и углом атаки $\alpha_1$ в точке $x_1$). Входящие в формулы (3) и (4) величины $\sin\vartheta$ и $\cos\vartheta$ с учетом выражения (5) и условия малости угла атаки могут быть записаны в виде:

$$\sin\vartheta\approx\sin\theta_1-\alpha_1\cos\theta_1,$$

$$\cos\vartheta\approx\cos\theta_1+\alpha_1\sin\theta_1.$$

Здесь $\theta_1=\vartheta+\alpha_1=\operatorname{arctg}\frac{V_{y1}}{U_0}$, $\cos\theta_1=\frac{U_0}{U_1}$, $\sin\theta_1=\frac{y_0\omega\cos\omega t}{U_1}$,

$$U_1=\sqrt{U_0^2+(y_0\omega)^2\cos^2\omega t}.$$

Выражение (11) можно представить в виде

$$C_{T5} = C_{T5-1} + C_{T5-2} + C_{T5-3} + C_{T5-4} + C_{T5-5} + C_{T5-6} + C_{T5-7} + C_{T5-8} + C_{T5-9} + C_{T5-10}. \qquad (12)$$

Члены в правой части выражения (12) в рассматриваемом случае имеют вид

$$C_{T5-1} = -2\pi D_1 \frac{\overline{v_{nc}^2 \cos\vartheta}}{U_0^2} = -2\pi D_1 \frac{2\sqrt{2}(Sh_0)^2 \lambda_P^2 X^2}{(2\lambda_P^2+1)\sqrt{2\lambda_P^2+1}} J_{5-1},$$

$$J_{5-1} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{\lambda_P}{(2\lambda_P^2+1)} J_{5-1-1} - \alpha_0 J_{5-1-2} + \dfrac{\alpha_0}{2(2\lambda_P^2+1)} J_{5-1-3} + \dfrac{\alpha_0^2(2\lambda_P^2+1)^2}{8\lambda_P^3(Sh_0)^2 X^2} J_{5-1-4} + \\ + \dfrac{\alpha_0^2(2\lambda_P^2+1)}{4\lambda_P} J_{5-1-5} + \dfrac{\alpha_0^3(2\lambda_P^2+1)^2}{16(Sh_0)^2\lambda_P^4 X^2} J_{5-1-6} - \dfrac{\alpha_0^2}{2\lambda_P} J_{5-1-7} + \dfrac{\alpha_0^3(2\lambda_P^2+1)}{8\lambda_P^2} J_{5-1-8} \end{array}\right],$$

$$J_{5-1-1} = \left[\begin{array}{l} 1 + \dfrac{1.25}{(2\lambda_P^2+1)} + \dfrac{2.188}{(2\lambda_P^2+1)^2} + \dfrac{2.461}{(2\lambda_P^2+1)^3} + \dfrac{3.384}{(2\lambda_P^2+1)^4} + \\ + \dfrac{2.964}{(2\lambda_P^2+1)^5} + \dfrac{2.795}{(2\lambda_P^2+1)^6} + \dfrac{2.094}{(2\lambda_P^2+1)^7} + \dfrac{1.57}{(2\lambda_P^2+1)^8} \end{array}\right],$$

$$J_{5-1-2} = \left[\begin{array}{l} 1 + \dfrac{0.75}{(2\lambda_P^2+1)} + \dfrac{0.938}{(2\lambda_P^2+1)^2} + \dfrac{0.82}{(2\lambda_P^2+1)^3} + \dfrac{0.923}{(2\lambda_P^2+1)^4} + \\ + \dfrac{0.457}{(2\lambda_P^2+1)^5} + \dfrac{0.3}{(2\lambda_P^2+1)^6} + \dfrac{0.16}{(2\lambda_P^2+1)^7} + \dfrac{0.075}{(2\lambda_P^2+1)^8} \end{array}\right],$$

$$J_{5-1-3} = \left[0.5 + \frac{0.547}{(2\lambda_P^2+1)^2} + \frac{0.564}{(2\lambda_P^2+1)^4} + \frac{0.349}{(2\lambda_P^2+1)^6} + \frac{0.157}{(2\lambda_P^2+1)^8}\right],$$

$$J_{5-1-4} = \left[1 + \frac{0.25}{(2\lambda_P^2+1)} - \frac{0.0625}{(2\lambda_P^2+1)^2} + \frac{0.0234}{(2\lambda_P^2+1)^3} - \frac{0.0146}{(2\lambda_P^2+1)^4} + \frac{0.0085}{(2\lambda_P^2+1)^5}\right],$$

$$J_{5-1-5} = \left[1 + \frac{0.25}{(2\lambda_P^2+1)} + \frac{0.1875}{(2\lambda_P^2+1)^2} + \frac{0.1172}{(2\lambda_P^2+1)^3} + \frac{0.1025}{(2\lambda_P^2+1)^4}\right],$$

$$J_{5-1-6} = \left[1.5 + \frac{0.5}{(2\lambda_P^2+1)} - \frac{0.1094}{(2\lambda_P^2+1)^2} + \frac{0.0469}{(2\lambda_P^2+1)^3} - \frac{0.0286}{(2\lambda_P^2+1)^4} + \frac{0.0171}{(2\lambda_P^2+1)^5}\right],$$

$$J_{5-1-7} = \left[0.5 + \frac{0.2344}{(2\lambda_P^2+1)^2} + \frac{0.1538}{(2\lambda_P^2+1)^4} + \frac{0.0375}{(2\lambda_P^2+1)^6} + \frac{0.0075}{(2\lambda_P^2+1)^8}\right],$$

$$J_{5-1-8} = 0.5 + \frac{0.0469}{(2\lambda_P^2+1)^2} + \frac{0.0171}{(2\lambda_P^2+1)^4}.$$

$$C_{T5-2} = -2\pi D_2 \left(\frac{\overline{v_{nc}\omega_z \cos\vartheta}}{U_0^2}\right) = -2\pi D_2 \frac{2\sqrt{2}(Sh_0)^2 \lambda_P^3 X}{(2\lambda_P^2+1)^2 \sqrt{(2\lambda_P^2+1)}} J_{5-2},$$

$$J_{5-2} = \left(\begin{array}{l} J_{5-1-1} - \dfrac{\alpha_0(2\lambda_P^2+1)}{2\lambda_P} J_{5-1-2} + \dfrac{\alpha_0^2(2\lambda_P^2+1)^2}{4\lambda_P^2} J_{5-1-5} + \\ + \dfrac{\alpha_0}{2\lambda_P} J_{5-1-3} - \dfrac{\alpha_0^2(2\lambda_P^2+1)}{4\lambda_P^2} J_{5-1-7} + \dfrac{\alpha_0^3(2\lambda_P^2+1)^2}{8\lambda_P^2} J_{5-1-8} \end{array}\right),$$

$$C_{T5-3} = -2\pi D_3 \frac{\overline{\nu_{nc}\dot{\omega}_z \cos\vartheta}}{U_0^2 U_c} = -2\pi D_3 \left[ -\frac{\sqrt{2}(Sh_0)^2 \alpha_0 \lambda_P^2}{(2\lambda_P^2+1)\sqrt{(2\lambda_P^2+1)}} \right] J_{5-3},$$

$$J_{5-3} = \left[ \begin{array}{l} J_{5-3-1} + \dfrac{2}{(2\lambda_P^2+1)} J_{5-1-3} - \dfrac{\alpha_0(2\lambda_P^2+1)}{2\lambda_P} J_{5-3-3} + \\ + \dfrac{\alpha_0}{2\lambda_P} J_{5-3-4} + \dfrac{\alpha_0}{\lambda_P(2\lambda_P^2+1)} J_{5-3-5} - \dfrac{\alpha_0^2(2\lambda_P^2+1)}{4\lambda_P^2} J_{5-3-6} \end{array} \right],$$

$$J_{5-3-1} = \left[ \begin{array}{l} 1 - \dfrac{0.75}{(2\lambda_P^2+1)} + \dfrac{0.938}{(2\lambda_P^2+1)^2} - \dfrac{0.82}{(2\lambda_P^2+1)^3} + \dfrac{0.923}{(2\lambda_P^2+1)^4} - \\ - \dfrac{0.457}{(2\lambda_P^2+1)^5} + \dfrac{0.3}{(2\lambda_P^2+1)^6} - \dfrac{0.16}{(2\lambda_P^2+1)^7} + \dfrac{0.075}{(2\lambda_P^2+1)^8} \end{array} \right],$$

$$J_{5-3-3} = \left[ \begin{array}{l} 1 - \dfrac{0.25}{(2\lambda_P^2+1)} + \dfrac{0.1875}{(2\lambda_P^2+1)^2} - \\ - \dfrac{0.1172}{(2\lambda_P^2+1)^3} + \dfrac{0.1025}{(2\lambda_P^2+1)^4} \end{array} \right],$$

$$J_{5-3-4} = \left[ \begin{array}{l} 1.5 - \dfrac{1.5}{(2\lambda_P^2+1)} + \dfrac{1.64}{(2\lambda_P^2+1)^2} - \dfrac{1.64}{(2\lambda_P^2+1)^3} + \\ + \dfrac{1.6919}{(2\lambda_P^2+1)^4} - \dfrac{0.9131}{(2\lambda_P^2+1)^5} + \dfrac{0.5628}{(2\lambda_P^2+1)^6} - \dfrac{0.32}{(2\lambda_P^2+1)^7} + \dfrac{0.1423}{(2\lambda_P^2+1)^8} \end{array} \right],$$

$$J_{5-3-5} = \left[ \begin{array}{l} 0.5 - \dfrac{0.3125}{(2\lambda_P^2+1)} + \dfrac{0.5469}{(2\lambda_P^2+1)^2} - \dfrac{0.41}{(2\lambda_P^2+1)^3} + \dfrac{0.564}{(2\lambda_P^2+1)^4} - \\ - \dfrac{0.37}{(2\lambda_P^2+1)^5} + \dfrac{0.3494}{(2\lambda_P^2+1)^6} - \dfrac{0.209}{(2\lambda_P^2+1)^7} + \dfrac{0.157}{(2\lambda_P^2+1)^8} \end{array} \right],$$

$$J_{5-3-6} = 1.5 - \frac{0.5}{(2\lambda_P^2+1)} + \frac{0.3281}{(2\lambda_P^2+1)^2} - \frac{0.2344}{(2\lambda_P^2+1)^3} + \frac{0.1879}{(2\lambda_P^2+1)^4},$$

$$C_{T5-4} = 0.$$

$$C_{T5-5} = -2\pi D_5 \frac{\overline{\dot{\nu}_{nc}\omega_z \cos\vartheta}}{U_0^2 U_c} = -2\pi D_5 \left[ \frac{\sqrt{2}(Sh_0)^2 \alpha_0 \lambda_P^2}{(2\lambda_P^2+1)\sqrt{(2\lambda_P^2+1)}} \right] J_{5-5},$$

$$J_{5-5} = \left[ \begin{array}{l} J_{5-1-2} - \dfrac{\alpha_0(2\lambda_P^2+1)}{2\lambda_P} J_{5-1-5} + \dfrac{1}{(2\lambda_P^2+1)} J_{5-1-3} \\ - \dfrac{\alpha_0^2(2\lambda_P^2+1)}{4\lambda_P^2} J_{5-1-8} + \dfrac{\alpha_0}{2\lambda_P(2\lambda_P^2+1)} J_{5-5-7} - \dfrac{\alpha_0^2}{4\lambda_P^2} J_{5-5-8} \end{array} \right],$$

$$J_{5-5-7} = \left[ \begin{array}{l} 0.5 - \dfrac{0.3125}{(2\lambda_P^2+1)} + \dfrac{0.5469}{(2\lambda_P^2+1)^2} - \dfrac{0.41}{(2\lambda_P^2+1)^3} + \dfrac{0.564}{(2\lambda_P^2+1)^4} - \\ - \dfrac{0.37}{(2\lambda_P^2+1)^5} + \dfrac{0.3494}{(2\lambda_P^2+1)^6} - \dfrac{0.2094}{(2\lambda_P^2+1)^7} + \dfrac{0.157}{(2\lambda_P^2+1)^8} \end{array} \right],$$

$$J_{5-5-8}=\left[\begin{array}{l}0.5-\dfrac{0.1875}{(2\lambda_P^2+1)}+\dfrac{0.2344}{(2\lambda_P^2+1)^2}-\dfrac{0.1367}{(2\lambda_P^2+1)^3}+\\+\dfrac{0.1538}{(2\lambda_P^2+1)^4}-\dfrac{0.0571}{(2\lambda_P^2+1)^5}+\dfrac{0.0375}{(2\lambda_P^2+1)^6}\end{array}\right].$$

$$C_{T5-6}=-2\pi D_6(\overline{\omega_z^2\cos\vartheta})=-2\pi D_6\left[\frac{2\sqrt{2}(Sh_0)^2\lambda_P^3}{(2\lambda_P^2+1)^2\sqrt{(2\lambda_P^2+1)}}\right]J_{5-6},$$

$$J_{5-6}=\left[\begin{array}{l}J_{5-6-1}-\dfrac{\alpha_0(2\lambda_P^2+1)}{\lambda_P}J_{5-6-2}+\dfrac{\alpha_0^2(2\lambda_P^2+1)^2}{4\lambda_P^2}J_{5-6-3}+\dfrac{\alpha_0}{2\lambda_P}J_{5-6-4}-\\-\dfrac{\alpha_0^2(2\lambda_P^2+1)}{2\lambda_P^2}J_{5-6-5}+\dfrac{\alpha_0^3(2\lambda_P^2+1)^2}{8\lambda_P^3}J_{5-6-6}\end{array}\right].$$

$$J_{5-6-1}=J_{5-1-1},$$
$$J_{5-6-2}=J_{5-1-2},$$
$$J_{5-6-3}=J_{5-1-5},$$
$$J_{5-6-4}=J_{5-1-3},$$
$$J_{5-6-5}=J_{5-1-7},$$
$$J_{5-6-6}=J_{5=1=8},$$
$$C_{T5-7}=0.$$

$$C_{T5-8}=-2\pi D_8\left[\frac{\overline{\dot{\nu}_{nc}^2\cos\vartheta}}{U_0^2U_c^2}\right]=-2\pi D_8\left[\frac{4\sqrt{2}(Sh_0)^4\lambda_P^5X^2}{(2\lambda_P^2+1)^3\sqrt{(2\lambda_P^2+1)}}\right]J_{5-8},$$

$$J_{5-8}=\left[\begin{array}{l}J_{5-8-1}+\dfrac{4}{(2\lambda_P^2+1)}J_{5-8-2}+\dfrac{4}{(2\lambda_P^2+1)^2}J_{5-8-3}-\dfrac{\alpha_0(2\lambda_P^2+1)}{\lambda_P}J_{5-8-4}-\dfrac{2\alpha_0}{\lambda_P}J_{5-8-5}+\\+\dfrac{\alpha_0}{2\lambda_P}J_{5-8-6}+\dfrac{2\alpha_0}{\lambda_P(2\lambda_P^2+1)}J_{5-8-7}+\dfrac{2\alpha_0}{\lambda_P(2\lambda_P^2+1)^2}J_{5-8-8}+\dfrac{\alpha_0^3(2\lambda_P^2+1)}{16(Sh_0)^2\lambda_P^5X^2}J_{5-8-9}-\\-\dfrac{\alpha_0^2}{\lambda_P^2}J_{5-8-10}-\dfrac{\alpha_0^2(2\lambda_P^2+1)}{2\lambda_P^2}J_{5-8-11}+\dfrac{\alpha_0^2(2\lambda_P^2+1)}{8(Sh_0)^2\lambda_P^4X^2}J_{5-8-12}+\dfrac{\alpha_0^2(2\lambda_P^2+1)^3}{8(Sh_0)^2\lambda_P^4X^2}J_{5-8-13}+\\+\dfrac{\alpha_0^2(2\lambda_P^2+1)^2}{4(Sh_0)\lambda_P^4X^2}J_{5-8-14}+\dfrac{\alpha_0^2(2\lambda_P^2+1)^2}{4\lambda_P^2}J_{5-8-15}+\dfrac{\alpha_0^3(2\lambda_P^2+1)^3}{16(Sh_0)^2\lambda_P^5X^2}J_{5-8-16}+\\+\dfrac{\alpha_0^3(2\lambda_P^2+1)^2}{4(Sh_0)^2\lambda_P^5X^2}J_{5-8-17}+\dfrac{\alpha_0^3(2\lambda_P^2+1)^2}{8\lambda_P^3}J_{5-8-18}\end{array}\right],$$

$$J_{5-8-1}=\left[\begin{array}{l}1-\dfrac{1.75}{(2\lambda_P^2+1)}+\dfrac{3.9375}{(2\lambda_P^2+1)^2}-\dfrac{5.4143}{(2\lambda_P^2+1)^3}+\dfrac{8.798}{(2\lambda_P^2+1)^4}-\dfrac{10.139}{(2\lambda_P^2+1)^5}+\\+\dfrac{12.48}{(2\lambda_P^2+1)^6}-\dfrac{12.25}{(2\lambda_P^2+1)^7}+\dfrac{12.58}{(2\lambda_P^2+1)^8}-\dfrac{10.295}{(2\lambda_P^2+1)^9}+\dfrac{8.44}{(2\lambda_P^2+1)^{10}}\end{array}\right],$$

$$J_{5-8-2}=\left[0.5+\frac{1.547}{(2\lambda_P^2+1)^2}+\frac{3.142}{(2\lambda_P^2+1)^4}+\frac{4.616}{(2\lambda_P^2+1)^6}+\frac{5.1}{(2\lambda_P^2+1)^8}+\frac{4.064}{(2\lambda_P^2+1)^{10}}\right],$$

$$J_{5-8-3}=\left[\begin{array}{l}0.5+\dfrac{0.688}{(2\lambda_P^2+1)}+\dfrac{2.234}{(2\lambda_P^2+1)^2}+\dfrac{2.793}{(2\lambda_P^2+1)^3}+\dfrac{5.935}{(2\lambda_P^2+1)^4}+\dfrac{6.889}{(2\lambda_P^2+1)^5}+\\+\dfrac{11.403}{(2\lambda_P^2+1)^6}+\dfrac{12.027}{(2\lambda_P^2+1)^7}+\dfrac{16.68}{(2\lambda_P^2+1)^8}+\dfrac{15.17}{(2\lambda_P^2+1)^9}+\dfrac{16.64}{(2\lambda_P^2+1)^{10}}\end{array}\right],$$

$$J_{5-8-4}=\left[\begin{array}{l}1-\dfrac{1.25}{(2\lambda_P^2+1)}+\dfrac{2.188}{(2\lambda_P^2+1)^2}-\dfrac{2.461}{(2\lambda_P^2+1)^3}+\dfrac{3.384}{(2\lambda_P^2+1)^4}-\\-\dfrac{2.964}{(2\lambda_P^2+1)^5}+\dfrac{2.795}{(2\lambda_P^2+1)^6}-\dfrac{2.094}{(2\lambda_P^2+1)^7}+\dfrac{1.57}{(2\lambda_P^2+1)^8}\end{array}\right],$$

$$J_{5-8-5}=\left[0.5+\dfrac{0.984}{(2\lambda_P^2+1)^2}+\dfrac{1.466}{(2\lambda_P^2+1)^4}+\dfrac{1.561}{(2\lambda_P^2+1)^6}+\dfrac{1.258}{(2\lambda_P^2+1)^8}+\dfrac{0.7}{(2\lambda_P^2+1)^{10}}\right],$$

$$J_{5-8-6}=\left[\begin{array}{l}1.5-\dfrac{3.5}{(2\lambda_P^2+1)}+\dfrac{6.891}{(2\lambda_P^2+1)^2}-\dfrac{10.829}{(2\lambda_P^2+1)^3}+\dfrac{16.13}{(2\lambda_P^2+1)^4}-\dfrac{20.278}{(2\lambda_P^2+1)^5}+\\+\dfrac{23.409}{(2\lambda_P^2+1)^6}-\dfrac{24.5}{(2\lambda_P^2+1)^7}+\dfrac{23.898}{(2\lambda_P^2+1)^8}-\dfrac{20.59}{(2\lambda_P^2+1)^9}+\dfrac{16.176}{(2\lambda_P^2+1)^{10}}\end{array}\right],$$

$$J_{5-8-7}=\left[\begin{array}{l}0.5-\dfrac{0.563}{(2\lambda_P^2+1)}+\dfrac{1.547}{(2\lambda_P^2+1)^2}-\dfrac{1.676}{(2\lambda_P^2+1)^3}+\dfrac{3.142}{(2\lambda_P^2+1)^4}-\dfrac{3.192}{(2\lambda_P^2+1)^5}+\\+\dfrac{4.616}{(2\lambda_P^2+1)^6}-\dfrac{4.241}{(2\lambda_P^2+1)^7}+\dfrac{5.103}{(2\lambda_P^2+1)^8}-\dfrac{4.131}{(2\lambda_P^2+1)^9}+\dfrac{4.064}{(2\lambda_P^2+1)^{10}}\end{array}\right],$$

$$J_{5-8-8}=\left[0.375+\dfrac{1.117}{(2\lambda_P^2+1)^2}+\dfrac{2.266}{(2\lambda_P^2+1)^4}+\dfrac{3.421}{(2\lambda_P^2+1)^6}+\dfrac{4.17}{(2\lambda_P^2+1)^8}+\dfrac{3.56}{(2\lambda_P^2+1)^{10}}\right],$$

$$J_{5-8-9}=\left[\begin{array}{l}0.625-\dfrac{0.625}{(2\lambda_P^2+1)}+\dfrac{0.82}{(2\lambda_P^2+1)^2}-\dfrac{0.82}{(2\lambda_P^2+1)^3}+\dfrac{0.9165}{(2\lambda_P^2+1)^4}-\\-\dfrac{0.741}{(2\lambda_P^2+1)^5}+\dfrac{0.592}{(2\lambda_P^2+1)^6}-\dfrac{0.4187}{(2\lambda_P^2+1)^7}+\dfrac{0.2748}{(2\lambda_P^2+1)^8}\end{array}\right],$$

$$J_{5-8-10}=\left[\begin{array}{l}0.5-\dfrac{0.4375}{(2\lambda_P^2+1)}+\dfrac{0.9844}{(2\lambda_P^2+1)^2}-\dfrac{0.9023}{(2\lambda_P^2+1)^3}+\dfrac{1.4663}{(2\lambda_P^2+1)^4}-\\-\dfrac{1.2677}{(2\lambda_P^2+1)^5}+\dfrac{1.561}{(2\lambda_P^2+1)^6}-\dfrac{1.2255}{(2\lambda_P^2+1)^7}+\dfrac{1.1845}{(2\lambda_P^2+1)^8}\end{array}\right],$$

$$J_{5-8-11}=\left[\begin{array}{l}1.5-\dfrac{2.5}{(2\lambda_P^2+1)}+\dfrac{3.8281}{(2\lambda_P^2+1)^2}-\dfrac{4.9219}{(2\lambda_P^2+1)^3}+\dfrac{6.2036}{(2\lambda_P^2+1)^4}-\\-\dfrac{5.9277}{(2\lambda_P^2+1)^5}+\dfrac{5.2414}{(2\lambda_P^2+1)^6}-\dfrac{4.187}{(2\lambda_P^2+1)^7}+\dfrac{2.9831}{(2\lambda_P^2+1)^8}\end{array}\right],$$

$$J_{5-8-12}=\begin{bmatrix}0.5-\dfrac{0.3125}{(2\lambda_P^2+1)}+\dfrac{0.5469}{(2\lambda_P^2+1)^2}-\dfrac{0.41}{(2\lambda_P^2+1)^3}+\dfrac{0.564}{(2\lambda_P^2+1)^4}-\\-\dfrac{0.37}{(2\lambda_P^2+1)^5}+\dfrac{0.3494}{(2\lambda_P^2+1)^6}-\dfrac{0.2094}{(2\lambda_P^2+1)^7}+\dfrac{0.157}{(2\lambda_P^2+1)^8}\end{bmatrix}$$

$$J_{5-8-13}=J_{5-1-5},$$
$$J_{5-8-14}=J_{5-1-7},$$
$$J_{5-8-15}=J_{5-3-1},$$
$$J_{5-8-16}=J_{5-1-8},$$
$$J_{5-8-17}=J_{5-1-7},$$
$$J_{5-8-18}=J_{5-3-3}.$$

$$C_{T5-9}=-2\pi D_9\left[\frac{\overline{\dot{\nu}_{nc}\,\dot{\omega}_z\cos\vartheta}}{U_0^2U_c^2}\right]=-2\pi D_9\left[\frac{4\sqrt{2}(Sh_0)^4\lambda_P^5X}{(2\lambda_P^2+1)^3\sqrt{(2\lambda_P^2+1)}}\right]J_{5-9},$$

$$J_{5-9}=\begin{bmatrix}J_{5-9-1}+\dfrac{4}{(2\lambda_P^2+1)}J_{5-9-2}-\dfrac{\alpha_0(2\lambda_P^2+1)}{\lambda_P}J_{5-9-3}+\dfrac{4}{(2\lambda_P^2+1)^2}J_{5-9-4}-\\-\dfrac{\alpha_0}{2\lambda_P}J_{5-9-5}+\dfrac{\alpha_0}{2\lambda_P}J_{5-9-6}+\dfrac{16\alpha_0}{\lambda_P(2\lambda_P^2+1)}J_{5-9-7}+\dfrac{2\alpha_0}{\lambda_P(2\lambda_P^2+1)^2}J_{5-9-8}-\\-\dfrac{\alpha_0^2(2\lambda_P^2+1)}{4\lambda_P^2}J_{5-9-9}-\dfrac{\alpha_0^2}{2\lambda_P^2}J_{5-9-10}+\dfrac{\alpha_0^2(2\lambda_P^2+1)^2}{4\lambda_P^2}J_{5-9-11}+\dfrac{\alpha_0^3(2\lambda_P^2+1)^2}{8\lambda_P^3}J_{5-9-12}\end{bmatrix},$$

$$J_{5-9-1}=J_{5-8-1},$$
$$J_{5-9-2}=J_{5-8-2},$$
$$J_{5-9-3}=J_{5-8-4},$$
$$J_{5-9-4}=J_{5-8-3},$$
$$J_{5-9-5}=J_{5-8-5},$$
$$J_{5-9-6}=J_{5-8-6},$$
$$J_{5-9-7}=J_{5-8-7},$$
$$J_{5-9-8}=J_{5-8-8},$$
$$J_{5-9-9}=J_{5-8-11},$$
$$J_{5-9-10}=J_{5-8-10},$$
$$J_{5-9-11}=J_{5-3-1},$$
$$J_{5-9-12}=J_{5-3-3}.$$

$$C_{T5-10}=-2\pi D_{10}\left[\frac{\overline{\dot{\omega}_z^2\cos\vartheta}}{U_0^2U_c^2}\right]=-2\pi D_{10}\left[\frac{4\sqrt{2}(Sh_0)^4\lambda_P^5}{(2\lambda_P^2+1)^3\sqrt{(2\lambda_P^2+1)}}\right]J_{5-10},$$

$$J_{5-10}=\left[\begin{array}{l} J_{5-10-1}+\dfrac{4}{(2\lambda_P^2+1)}J_{5-10-2}+\dfrac{4}{(2\lambda_P^2+1)^2}J_{5-10-3}-\dfrac{\alpha_0(2\lambda_P^2+1)}{\lambda_P}J_{5-10-4}- \\ -\dfrac{2\alpha_0}{\lambda_P}J_{5-10-5}+\dfrac{\alpha_0}{2\lambda_P}J_{5-10-6}+\dfrac{2\alpha_0}{\lambda_P(2\lambda_P^2+1)}J_{5-10-7}+\dfrac{2\alpha_0}{\lambda_P(2\lambda_P^2+1)^2}J_{5-10-8}- \\ -\dfrac{\alpha_0^2(2\lambda_P^2+1)}{2\lambda_P^2}J_{5-10-9}-\dfrac{\alpha_0^2}{\lambda_P^2}J_{5-10-10}+\dfrac{\alpha_0^2(2\lambda_P^2+1)^2}{4\lambda_P^2}J_{5-10-11}+\dfrac{\alpha_0^3(2\lambda_P^2+1)^2}{8\lambda_P^3}J_{5-10-12} \end{array}\right],$$

$$J_{5-10-1}=J_{5-9-1},$$

$$J_{5-10-2}=J_{5-9-2},$$

$$J_{5-10-3}=\left[\begin{array}{l} 0.5+\dfrac{0.688}{(2\lambda_P^2+1)}+\dfrac{1.5469}{(2\lambda_P^2+1)^2}+\dfrac{2.793}{(2\lambda_P^2+1)^3}+\dfrac{5.1421}{(2\lambda_P^2+1)^4}+ \\ +\dfrac{6.882}{(2\lambda_P^2+1)^5}+\dfrac{11.4}{(2\lambda_P^2+1)^6}+\dfrac{12.027}{(2\lambda_P^2+1)^7}+\dfrac{16.68}{(2\lambda_P^2+1)^8} \end{array}\right],$$

$$J_{5-10-4}=J_{5-9-3},$$

$$J_{5-10-5}=\left[0.5+\frac{0.9844}{(2\lambda_P^2+1)^2}+\frac{1.4663}{(2\lambda_P^2+1)^4}+\frac{1.561}{(2\lambda_P^2+1)^6}+\frac{1.1845}{(2\lambda_P^2+1)^8}\right],$$

$$J_{5-10-6}=J_{5-9-6},$$
$$J_{5-10-7}=J_{5-9-7},$$
$$J_{5-10-8}=J_{5-9-8},$$

$$J_{5-10-9}=\left[\begin{array}{l} 1.5-\dfrac{2.5}{(2\lambda_P^2+1)}+\dfrac{3.8281}{(2\lambda_P^2+1)^2}-\dfrac{4.9219}{(2\lambda_P^2+1)^3}+\dfrac{6.2036}{(2\lambda_P^2+1)^4}- \\ -\dfrac{5.9277}{(2\lambda_P^2+1)^5}+\dfrac{5.2414}{(2\lambda_P^2+1)^6}-\dfrac{4.187}{(2\lambda_P^2+1)^7}+\dfrac{2.9831}{(2\lambda_P^2+1)^8} \end{array}\right],$$

$$J_{5-10-10}=\left[\begin{array}{l} 0.5-\dfrac{0.4375}{(2\lambda_P^2+1)}+\dfrac{0.9844}{(2\lambda_P^2+1)^2}-\dfrac{0.9023}{(2\lambda_P^2+1)^3}+\dfrac{1.4663}{(2\lambda_P^2+1)^4}- \\ -\dfrac{1.2677}{(2\lambda_P^2+1)^5}+\dfrac{1.561}{(2\lambda_P^2+1)^6}-\dfrac{1.2255}{(2\lambda_P^2+1)^7}+\dfrac{1.1845}{(2\lambda_P^2+1)^8} \end{array}\right],$$

$$J_{5-10-11}=J_{5-3-1},$$
$$J_{5-10-12}=J_{5-10-9}.$$

Одна из составляющих коэффициента мощности, включающая индуктивное сопротивление, имеет вид

$$C_{P6}=\frac{2}{\rho S U_0^3}\overline{X_{ic}V_{yc}\sin\vartheta}. \tag{13}$$

Раскрыв выражение (13), получим

$$C_{P6} = \frac{2\pi}{U_0^3}\left(\begin{array}{l} D_1\,\overline{V_{yc}\nu_{nc}^2\sin\vartheta} + D_2\,\overline{V_{yc}\nu_{nc}\omega_z\sin\vartheta} + D_3\,\overline{\dfrac{V_{yc}\nu_{nc}\dot{\omega}_z}{U_c}\sin\vartheta} + D_4\,\overline{\dfrac{V_{yc}\nu_{nc}\dot{\nu}_{nc}}{U_c}\sin\vartheta} + \\ + D_5\,\overline{\dfrac{V_{yc}\dot{\nu}_{nc}\omega_z}{U_c}\sin\vartheta} + D_6\,\overline{V_{yc}\omega_z^2\sin\vartheta} + D_7\,\overline{\dfrac{V_{yc}\omega_z\dot{\omega}_z}{U_c}\sin\vartheta} + D_8\,\overline{\dfrac{V_{yc}\dot{\nu}_{nc}^2}{U_c^2}\sin\vartheta} + \\ + D_9\,\overline{\dfrac{V_{yc}\dot{\nu}_{nc}\dot{\omega}_z}{U_c^2}\sin\vartheta} + D_{10}\,\overline{\dfrac{V_{yc}\dot{\omega}_z^2}{U_c^2}\sin\vartheta} \end{array}\right). \qquad (14)$$

Это выражение можно представить в форме

$$C_{P6} = C_{P6-1} + C_{P6-2} + C_{P6-3} + C_{P6-4} + C_{P6-5} + C_{P6-6} + C_{P6-7} + C_{P6-8} + C_{P6-9} + C_{P6-10}.$$

Входяще в правую часть коэффициенты имеют вид:

$$C_{P6-1} = 2\pi D_1\left[\frac{\overline{V_{yc}\nu_{nc}^2\sin\vartheta}}{U_0^3}\right] = 2\pi D_1\left[\frac{\sqrt{2}\,(Sh_0)^2\lambda_P X^2}{(2\lambda_P^2+1)^2\,\sqrt{(2\lambda_P^2+1)}}\right]I_{6-1},$$

$$I_{6-1} = \left[I_{6-1-1} - \alpha_0\lambda_P I_{6-1-2} + \frac{\alpha_0(2\lambda_P^2+1)}{\lambda_P}I_{6-1-3} + 2\alpha_0\lambda_P I_{6-1-4}\right],$$

$$I_{6-1-1} = J_{5-1-3},$$

$$I_{6-1-2} = J_{5-1-3},$$

$$I_{6-1-3} = \left[0.5 + \frac{0.234}{(2\lambda_P^2+1)^2} + \frac{0.154}{(2\lambda_P^2+1)^4} + \frac{0.038}{(2\lambda_P^2+1)^6} + \frac{0.008}{(2\lambda_P^2+1)^8}\right],$$

$$I_{6-1-4} = J_{5-1-3},$$

$$C_{P6-2} = 0.$$

$$C_{P6-3} = 2\pi D_3\left[\frac{\overline{V_{yc}\nu_{nc}\dot{\omega}_z\sin\vartheta}}{U_0^3 U_c}\right] = 2\pi D_3\left[\frac{4\,\sqrt{2}\,(Sh_0)^4\alpha_0\lambda_P^4 X^2}{(2\lambda_P^2+1)^3\,\sqrt{(2\lambda_P^2+1)}}\right]I_{6-3},$$

$$I_{6-3} = \left[\begin{array}{l} -\dfrac{(2\lambda_P^2+1)^2}{8(Sh_0)^2\lambda_P^4X^2}I_{6-3-1} - \dfrac{(2\lambda_P^2+1)}{4(Sh_0)^2\lambda_P^4X^2}I_{6-3-2} + \dfrac{\alpha_0(2\lambda_P^2+1)^3}{16(Sh_0)^2\lambda_P^5X^2}I_{6-3-3} + \\ + \dfrac{\alpha_0(2\lambda_P^2+1)^2}{8(Sh_0)^2\lambda_P^3X^2}I_{6-3-4} + \dfrac{\alpha_0(2\lambda_P^2+1)}{4(Sh_0)^2\lambda_P^3X^2}I_{6-3-5} - \dfrac{\alpha_0^2(2\lambda_P^2+1)^3}{16(Sh_0)^2\lambda_P^4X^2}I_{6-3-6} - \\ - \dfrac{\lambda_P}{\alpha_0(2\lambda_P^2+1)}I_{6-3-7} + I_{6-3-8} - \dfrac{\alpha_0(2\lambda_P^2+1)}{4\lambda_P}I_{6-3-9} + \dfrac{\alpha_0^2(2\lambda_P^2+1)^2}{8\lambda_P}I_{6-3-10} + \\ + \dfrac{\lambda_P^2}{(2\lambda_P^2+1)}I_{6-3-11} - \lambda_P I_{6-3-12} + \dfrac{\alpha_0^2(2\lambda_P^2+1)}{4}I_{6-3-13} - \dfrac{\alpha_0\lambda_P}{2}I_{6-3-14} + \\ + \dfrac{\alpha_0^2(2\lambda_P^2+1)}{2}I_{6-3-15} - \dfrac{\alpha_0^3(2\lambda_P^2+1)^2}{8\lambda_P}I_{6-3-16} \end{array}\right],$$

$$I_{6-3-1} = J_{5-3-4},$$

$$I_{6-3-2} = J_{5-3-5},$$

$$I_{6-3-3} = J_{5-3-6},$$

$$I_{6-3-4} = J_{5-3-4},$$

$$I_{6-3-5} = J_{5-3-5},$$

$$I_{6-3-6} = J_{5-3-6}$$

$$I_{6-3-7} = \left[0.5 + \frac{1.5463}{(2\lambda_P^2+1)^2} + \frac{3.1421}{(2\lambda_P^2+1)^4} + \frac{4.6172}{(2\lambda_P^2+1)^6} + \frac{5.1789}{(2\lambda_P^2+1)^8} + \frac{4.0626}{(2\lambda_P^2+1)^{10}}\right],$$

$$I_{6-3-8} = \left[0.5 + \frac{0.9844}{(2\lambda_P^2+1)^2} + \frac{1.4663}{(2\lambda_P^2+1)^4} + \frac{1.561}{(2\lambda_P^2+1)^6} + \frac{1.1845}{(2\lambda_P^2+1)^8}\right].$$

$$I_{6-3-9} = J_{5-1-3},$$

$$I_{6-3-10} = J_{5-1-7},$$

$$I_{6-3-11} = J_{5-8-2},$$

$$I_{6-3-12} = I_{6-3-8},$$

$$I_{6-3-13} = J_{5-1-3},$$

$$I_{6-3-14} = I_{6-3-8},$$

$$I_{6-3-15} = I_{6-3-9},$$

$$I_{6-3-16} = J_{5-1-7}.$$

$$C_{P6-4} = 2\pi D_3\left[\frac{V_{yc}\nu_{nc}\dot{\nu}_{nc}\sin\vartheta}{U_0^3 U_c}\right] = 2\pi D_4\left[\frac{4\sqrt{2}(Sh_0)^4\alpha_0\lambda_P^6 X^3}{(2\lambda_P^2+1)^4\sqrt{(2\lambda_P^2+1)}}\right] I_{6-4},$$

$$I_{6-4} = \left[\begin{array}{l} \frac{(2\lambda_P^2+1)^3}{8(Sh_0)^2\lambda_P^6X^2} I_{6-4-1} + \frac{(2\lambda_P^2+1)^2}{8(Sh_0)^2\lambda_P^6X^2} I_{6-4-2} - \frac{1}{\alpha_0\lambda_P} I_{6-4-3} + I_{6-4-4} + \\ + \frac{2}{(2\lambda_P^2+1)} I_{6-4-5} + \frac{(2\lambda_P^2+1)}{2\lambda_P^2} I_{6-4-6} + \frac{(2\lambda_P^2+1)}{\lambda_P^2} I_{6-4-7} + \frac{2}{\lambda_P^2} I_{6-4-8} - \\ - \frac{\alpha_0(2\lambda_P^2+1)^4}{16(Sh_0)^2\lambda_P^7X^2} I_{6-4-9} - \frac{(2\lambda_P^2+1)^3}{8(Sh_0)^2\lambda_P^6X^2} I_{6-4-10} + \frac{\alpha_0(2\lambda_P^2+1)^4}{16(Sh_0)^2\lambda_P^7X^2} I_{6-4-11} + \\ + \frac{\alpha_0(2\lambda_P^2+1)^3}{8(Sh_0)^2\lambda_P^5X^2} I_{6-4-12} + \frac{\alpha_0(2\lambda_P^2+1)^2}{4(Sh_0)^2\lambda_P^5X^2} I_{6-4-13} - \frac{\alpha_0(2\lambda_P^2+1)^2}{2\lambda_P^3} I_{6-4-14} - \\ - \frac{\alpha_0(2\lambda_P^2+1)^2}{4\lambda_P^3} I_{6-4-15} - \frac{\alpha_0(2\lambda_P^2+1)}{2\lambda_P} I_{6-4-16} - \frac{\alpha_0(2\lambda_P^2+1)}{\lambda_P} I_{6-4-17} - \\ - \frac{\alpha_0^2(2\lambda_P^2+1)^3}{8(Sh_0)^2\lambda_P^4X^2} I_{6-4-18} - \frac{\alpha_0^2(2\lambda_P^2+1)^4}{16(Sh_0)^2\lambda_P^6X^2} I_{6-4-19} + \frac{\alpha_0^2(2\lambda_P^2+1)^3}{8\lambda_P^4} I_{6-4-20} \end{array}\right],$$

$$I_{6-4-1} = I_{6-1-3}$$

$$I_{6-4-2} = J_{5-3-5},$$

$$I_{6-4-3} = J_{5-8-2},$$

$$I_{6-4-4} = J_{5-8-2},$$

$$I_{6-4-5} = J_{5-8-3},$$

$$I_{6-4-6} = J_{5-8-5},$$

$$I_{6-4-7} = J_{5-8-5},$$

$$I_{6-4-8}=\left[\begin{array}{l}0.5+\frac{0.5625}{(2\lambda_P^2+1)}+\frac{1.5463}{(2\lambda_P^2+1)^2}+\frac{1.6756}{(2\lambda_P^2+1)^3}+\frac{3.1421}{(2\lambda_P^2+1)^4}+\frac{3.1924}{(2\lambda_P^2+1)^5}+\\+\frac{4.6172}{(2\lambda_P^2+1)^6}+\frac{8.482}{(2\lambda_P^2+1)^7}+\frac{5.1789}{(2\lambda_P^2+1)^8}+\frac{4.1323}{(2\lambda_P^2+1)^9}+\frac{4.0686}{(2\lambda_P^2+1)^{10}}\end{array}\right],$$

$$I_{6-4-9}=J_{5-1-8},$$
$$I_{6-4-10}=J_{5-3-4},$$
$$I_{6-4-11}=J_{5-3-6},$$
$$I_{6-4-12}=J_{5-3-4},$$
$$I_{6-4-13}=J_{5-3-5},$$
$$I_{6-4-14}=J_{5-1-3},$$
$$I_{6-4-15}=J_{5-1-3},$$
$$I_{6-4-16}=J_{5-8-5},$$
$$I_{6-4-17}=J_{5-8-5},$$
$$I_{6-4-18}=J_{5-1-7},$$
$$I_{6-4-19}=J_{5-3-8},$$
$$I_{6-4-20}=J_{5-1-7}.$$

$$C_{P6-5}=2\pi D_5\left[\frac{V_{yc}\dot{\nu}_{nc}\omega_z\sin\vartheta}{U_0^3U_c}\right]=2\pi D_5\left[\frac{\sqrt{2}(Sh_0)^2\alpha_0}{2(2\lambda_P^2+1)\sqrt{(2\lambda_P^2+1)}}\right]I_{6-5},$$

$$I_{6-5}=\left[\begin{array}{l}I_{6-5-1}-\frac{8(Sh_0)^2\lambda_P^5X^2}{\alpha_0(2\lambda_P^2+1)^3}I_{6-5-2}+\frac{4(Sh_0)^2\lambda_P^4X^2}{(2\lambda_P^2+1)^2}I_{6-5-3}+\frac{8(Sh_0)^2\lambda_P^4X^2}{(2\lambda_P^2+1)^2}I_{6-5-4}+\\+\frac{32(Sh_0)^2\lambda_P^6X^2}{(2\lambda_P^2+1)^3}I_{6-5-5}+\frac{4(Sh_0)^2\alpha_0\lambda_P^3X^2}{(2\lambda_P^2+1)}I_{6-5-6}+\frac{2(Sh_0)^2\alpha_0\lambda_P^3X^2}{(2\lambda_P^2+1)}I_{6-5-7}-\alpha_0\lambda_PI_{6-5-8}+\\+\frac{8(Sh_0)^2\lambda_P^6X^2}{(2\lambda_P^2+1)^3}I_{6-5-9}-\frac{8(Sh_0)^2\alpha_0\lambda_P^5X^2}{(2\lambda_P^2+1)^2}I_{6-5-10}-\frac{8(Sh_0)^2\alpha_0^2\lambda_P^4X^2}{(2\lambda_P^2+1)}I_{6-5-11}\end{array}\right],$$

$$I_{6-5-1}=J_{5-1-7},$$
$$I_{6-5-2}=J_{5-8-2},$$
$$I_{6-5-3}=I_{6-3-8},$$
$$I_{6-5-4}=I_{6-3-8},$$
$$I_{6-5-5}=I_{6-3-7},$$
$$I_{6-5-6}=J_{5-1-3},$$
$$I_{6-5-7}=J_{5-1-3},$$
$$I_{6-5-8}=J_{5-1-7},$$
$$I_{6-5-9}=I_{6-3-7},$$
$$I_{6-5-10}=I_{6-3-8},$$
$$I_{6-5-11}=J_{5-1-3.}$$
$$C_{P6-6}=0,$$
$$C_{P6-7}=0,$$

$$C_{P6-8}=2\pi D_8\left[\frac{V_{yc}\dot{\nu}_{nc}^2\sin\vartheta}{U_0^3U_c^2}\right]=2\pi D_8\left[\frac{2\sqrt{2}(Sh_0)^4\lambda_P^3X^2}{(2\lambda_P^2+1)^3\sqrt{(2\lambda_P^2+1)}}\right]I_{6-8},$$

$$I_{6-8}=\left[\begin{array}{l}\dfrac{\alpha_0^2(2\lambda_P^2+1)^3}{8(Sh_0)^2\lambda_P^4X^2}I_{6-8-1}+I_{6-8-2}+\dfrac{4}{(2\lambda_P^2+1)}I_{6-8-3}-\dfrac{\alpha_0(2\lambda_P^2+1)}{\lambda_P}I_{6-8-4}+\\ +\dfrac{\alpha_0^2(2\lambda_P^2+1)^2}{4\lambda_P^2}I_{6-8-5}-2\alpha_0\lambda_P I_{6-8-6}+\dfrac{\alpha_0^2(2\lambda_P^2+1)}{2}I_{6-8-7}+\alpha_0^2(2\lambda_P^2+1)I_{6-8-8}-\\ -\dfrac{\alpha_0^3(2\lambda_P^2+1)^2}{2\lambda_P}-\dfrac{\alpha_0^3(2\lambda_P^2+1)^3}{2(Sh_0)^2\lambda_P^3X^2}I_{6-8-10}+\alpha_0\lambda_P I_{6-8-11}-\dfrac{4\alpha_0\lambda_P}{(2\lambda_P^2+1)}I_{6-8-12}+2\alpha_0^2\lambda_p^2 I_{6-8-13}\end{array}\right],$$

$$I_{6-8-1}=J_{5-1-8},$$

$$I_{6-8-2}=J_{5-8-6},$$

$$I_{6-8-3}=J_{5-8-7},$$

$$I_{6-8-4}=J_{5-8-11}$$

$$I_{6-8-5}=J_{5-3-4},$$

$$I_{6-8-6}=I_{6-3-8}$$

$$I_{6-8-7}=J_{5-1-3}$$

$$I_{6-8-8}=I_{6-3-11}$$

$$I_{6-8-9}=J_{5-1-7}$$

$$I_{6-8-10}=J_{5-1-8}$$

$$I_{6-8-11}=I_{6-3-8}$$

$$I_{6-8-12}=J_{5-8-7}$$

$$I_{6-8-13}=I_{6-3-8}$$

Для чисто линейных колебаний получаем ($\vartheta = 0$):

$$C_{T5-1}=-2\pi D_1\left(\frac{1}{2\lambda_P^2}\right),$$

$$C_{T5-2}=C_{T5-3}=C_{T5-4}=C_{T5-5}=C_{T5-6}=C_{T5-7}=C_{T5-9}=C_{T5-10}=0,$$

$$C_{T5-8}=-2\pi D_8\left\{\frac{1}{(2\lambda_P^2+1)}\left[1+\frac{0.5}{(2\lambda_P^2+1)}+\frac{0.5}{(2\lambda_P^2+1)^2}+\frac{0.375}{(2\lambda_P^2+1)^3}+\frac{0.17}{(2\lambda_P^2+1)^4}+\frac{0.073}{(2\lambda_P^2+1)^5}\right]\right\},$$

$$C_{P6}=0.$$

В приведенных выше формулах: $X$ – относительное расстояние от оси вращения до центра крыла $\left(X=\dfrac{x}{b}\right)$, $x$ – абсолютное расстояние от оси вращения до центра крыла (положительное, если ось вращения расположена ближе к задней кромке, отрицательное, если ось расположена ближе к передней кромке), $\lambda_P=\dfrac{U_0}{\omega y_0}$, $y_0$ – амплитуда линейных колебаний крыла, $\omega = 2\pi f$, $f$ – частота.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 11-04-00234а).

Авторы выражают искреннюю благодарность Р.И. Герасимовой за помощь в подготовке рукописи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

*Белоцерковский С.М.* О коэффициентах вращательных производных // Тр. ЦАГИ. 1958. вып. 725. С. 5–29.

*Некрасов А.И.* Теория крыла в нестационарном потоке. М.: Изд-во АН СССР, 1947. 258 с.

*Пушков С.Г., Романенко Е.В.* Гидродинамические силы, действующие на жесткое крыло при его движении с большими амплитудами поперечных и угловых колебаний // Успехи соврем. биологии. 2000. Т. 120. № 2. С. 207–216.

*Пушков С.Г., Романенко Е.В. Лопатин В.Н.* Гидродинамические силы, развиваемые крылом, при различных положениях оси вращения. Тяга при гармоническом угле атаки // Успехи соврем. биологии. 2006. Т. 126. № 3. С. 305–311.

*Пушков С.Г., Романенко Е.В., Лопатин В.Н.* Индуктивное сопротивление жесткого крыла // Успехи соврем. биологии. 2009. Т. 129. № 1. С. 93–103.

*Романенко Е.В.* Гидродинамика рыб и дельфинов. М.: КМК. 2001. 412 с.

*Романенко Е.В., Пушков С.Г.* Экспериментальное исследование кинематики хвостовой лопасти дельфина // Докл. РАН. 1998. Т. 358. № 2. С. 274–276.

*Романенко Е.В., Пушков С.Г.* Гидродинамика дельфинов, рыб и ластоногих // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2008. № 2. С. 13–28.

*Романенко Е.В., Пушков С.Г., Лопатин В.Н.* Гидродинамические силы, развиваемые крылом, при различных положениях оси его вращения. Тяга при гармоническом законе угловых колебаний // Успехи соврем. биологии. 2005. Т. 125. № 5. С. 478–483.

*Романенко Е.В., Пушков С.Г., Лопатин В.Н.* Гидродинамические силы, развиваемые крылом, при различных положениях оси его вращения. Тяга при гармоническом углов наклона и атаки // Успехи соврем. биологии. 2007. Т. 127. № 3. С. 299–304.

*Седов Л.И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 445 с.

*Romanenko E.V.* Fish and Dolphin Swimming. Sofia-Moscow: Pensoft, 2002. 430 p.


## Inductive Reactance of Flat and Rigid Wing


**E. V. Romanenko[1], S. G. Pushkov[2], V. N. Lopatin[1]**

[1]*Severtsov Institute of Ecology and Evolution, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*
[2]*Gromov Flight Research Institute, Moscow region, Russia*



The approximate expressions of hydrodynamic forces were used to construct a mathematical model of flat and rigid wing as the pitch-axes location varies and heaving and pitching amplitudes are rather large. A specific feature of this model is the use of coefficients of the first-order aerodynamic derivatives and kinematic parameters. The formulas to calculate the inductive reactance under harminic heave and pitch oscillations of wing are derived.



Сдано в набор 12.10.2012 г. Подписано к печати 14.11.2012 г. Формат 60 × 88 $^1/_8$
Цифровая печать Усл.печ.л. 12.0 Усл.кр.-отт. 2.1 тыс. Уч.-изд.л. 12.0 Бум.л. 6.0
Тираж 168 экз. Зак. 788

Учредитель: Российская академия наук

Издатель: Российская академия наук. Издательство “Наука”, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 90
Оригинал-макет подготовлен АИЦ “Наука” РАН
Отпечатано в ППП «Типография “Наука”». 121099, Москва, Шубинский пер., 6