

УДК 577.31

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ЖЕСТКОЕ КРЫЛО ПРИ ЕГО ДВИЖЕНИИ С БОЛЬШИМИ АМПЛИТУДАМИ ПОПЕРЕЧНЫХ И УГЛОВЫХ КОЛЕБАНИЙ

© 2000 г. С. Г. Пушкин, Е. В. Романенко

Институт проблем экологии и эволюции им. А.Н. Северцова РАН, Москва

Рассмотрена гидродинамическая задача о неустановившемся движении прямоугольного крыла конечного размаха в вязкой несжимаемой жидкости, когда на основное движение с постоянной скоростью накладываются поперечные и угловые колебания. Подъемная и подсосывающая силы крыла выражены через инерционные и циркуляционные составляющие. В случае периодических колебаний крыла получены оценочные соотношения для составляющих гидродинамических сил как в рамках малоамплитудной теории, так и при больших амплитудах колебаний. Представлены расчетные формулы. Показано, что оценки силы тяги, полученные на основании малоамплитудной теории, могут быть сильно завышенными (в 3–4 раза) по сравнению со значениями, рассчитанными с учетом фактора больших амплитуд. При больших амплитудах колебаний крыла гармоничность законов поперечных и угловых колебаний не обуславливает гармоничность изменения угла атаки, как это имеет место в случае малых значений амплитуд.

ВВЕДЕНИЕ

В исследованиях гидродинамики дельфинов, кономичности их движения важную роль играет задача оценки гидродинамических сил, действующих на хвостовой плавник. Экспериментальные данные показывают, что предпочтительным для дельфинов является режим плавания с большими амплитудами поперечных и угловых колебаний хвостовой лопасти при небольших значениях мгновенных углов атаки. Эти особенности движения должны быть корректно учтены при решении задачи.

В настоящей работе рассмотрены две модели движения крыла: малоамплитудное движение и движение с большими амплитудами линейных и угловых колебаний. Это сделано с целью сравнения результатов оценок развиваемых гидродинамических сил разными методами при соблюдении идентичности методик расчета, а также с целью сравнения теоретических оценок с имеющимися экспериментальными данными.

Проведенный анализ приводит к выводу, что для корректной оценки силы тяги, развиваемой хвостовым плавником при активном движении дельфина, недостаточно знать величины кинематических параметров в момент пересечения лопастью линии основного движения, а требуется знание закона движения в полном объеме.

СОСТАВЛЯЮЩИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛ В СЛУЧАЕ МАЛЫХ АМПЛИТУД КОЛЕБАНИЙ КРЫЛА

Плоская задача о неустановившемся движении тонкого профиля была рассмотрена, в частности, в работах Седова [8] и Некрасова [4]. В случае малых колебаний профиля относительно некоторого основного движения авторами были получены выражения для гидродинамических сил, допускающие простое физическое толкование.

Пусть имеется тонкое крыло, движущееся в безграничном объеме жидкости, покоящейся на бесконечности, и движение крыла можно представить в виде основного движения со скоростью V_0 и наложенного на него добавочного движения с малыми перемещениями и скоростями. Рассматривая движение крыла в подвижной системе координат xOy , движущейся со скоростью V_0 , авторы полагали, что при колебаниях с задней кромки профиля сходится линия разрыва скоростей, или вихревая пелена, и на задней кромке выполняется условие Чаплыгина–Жуковского о конечности скорости. Были получены следующие выражения для подъемной силы Y , нормальной к линии профиля, и подсосывающей силы X , направленной вдоль линии профиля:

$$Y = -m^* \frac{dv_n}{dt} - 2\rho\pi a V_0 (v_n - a\omega_z/2) -$$

$$-\rho a V_0 \int_a^\infty \frac{\gamma(\xi, t) d\xi}{\sqrt{\xi^2 - a^2}}, \quad (1)$$

$$X = 2\rho\pi a \left(v_n + (1/2\pi) \int_a^\infty \frac{\gamma(\xi, t) d\xi}{\sqrt{\xi^2 - a^2}} \right)^2,$$

где $m^* = \rho\pi(b/2)^2$ – присоединенная масса профиля, $b/2$ – половина хорды, v_n – нормальная скорость в центре профиля, $\omega_z = d\vartheta/dt$ – угловая скорость, $\gamma(\xi, t)$ – вихревая интенсивность в следе на расстоянии ξ от центра крыла, a – амплитуда колебаний крыла, t – время, ρ – плотность воды, ϑ – угол наклона крыла относительно горизонтальной оси.

Несложными преобразованиями выражения (1) можно представить в виде:

$$Y = -m^* \frac{dv_n}{dt} - \rho V_0 \Gamma, \quad (2)$$

$$X = m^* v_n \omega_z + \rho v_n \Gamma - 2\rho\pi a u_* (v_n - u_*).$$

Здесь величину $\Gamma = 2\pi a(v_n - a\omega_z/2 - u_*)$ можно рассматривать как присоединенную циркуляцию

[4], а $u_* = \frac{1}{2\pi} \int_a^\infty \frac{\gamma(\xi, t) d\xi}{\sqrt{\xi^2 - a^2}}$ как некоторую эффек-

тивную вызванную скорость, обусловленную наличием за крылом вихревой пелены.

В представлении подсасывающей силы выражения (2) первый член совпадает с решением плоской задачи о движении профиля при отсутствии циркуляции, второй является циркуляционным и его можно рассматривать как проекцию силы Жуковского $Y = \rho V \Gamma$ (где V – абсолютная скорость движения центра профиля). Третья составля-

ющая по своей структуре аналогична выражению для индуктивного сопротивления X_i крыла конечного размаха при его стационарном движении. В самом деле, схема несущей линии Прандтля приводит к формуле

$$X_i = \rho\pi \int_{-l}^l b u_{ni} (v_n - u_{ni}) dz, \quad (3)$$

где $b = b(z)$ – хорда крыла в сечении z (рис. 1), l – полуразмах крыла, v_n – нормальная скорость крыла, $u_{ni} = u_{ni}(z)$ – скорость, индуцируемая вихревой пеленой в точках несущей линии.

Рассмотрим задачу о неустановившемся движении крыла конечного размаха в постановке, аналогичной постановке в плоской задаче. При этом пусть форма крыла в плане будет симметрична относительно центральной линии Oz (рис. 1). Будем полагать, что в случае неустановившегося движения крыла конечного размаха влияние следа на гидродинамические характеристики крыла можно так же, как в плоской задаче, учесть введением некоторой эффективной индуцируемой скорости. Будем считать применимым метод плоских сечений и допускать справедливость соотношений, аналогичных выражениям (2):

$$Y = -m^* \frac{dv_n}{dt} - \rho V_0 \int_{-l}^l \Gamma(z) dz, \quad (4)$$

$$X = m^* v_n \omega_z + \rho v_n \int_{-l}^l \Gamma(z) dz - X_i,$$

где m^* – присоединенная масса крыла, $X_i = \rho\pi \int_{-l}^l b(z) f_*(z) (v_n - f_*(z)) dz$ – индуктивное сопротивление, f_* – некоторая эффективная скорость, индуцируемая вихревой пеленой, остающейся в следе, v_n – нормальная скорость крыла в точках оси симметрии крыла Oz , $b(z)$ – хорда крыла в сечении $z = \text{const}$, l – полуразмах крыла.

Так как v_n не зависит от z , для X_i можно сделать оценку “сверху”:

$$X_i \leq \rho\pi S \frac{v_n^2}{4}, \quad (5)$$

где S – площадь крыла.

Из последнего выражения следует, что при нестационарном движении крыла конечного размаха коэффициент индуктивного сопротивления не должен превышать величины $C_{X_i} \leq \pi\alpha^2/2$, где $\alpha = v_n/V_0$ – мгновенный угол атаки крыла, V_0 – скорость основного движения.

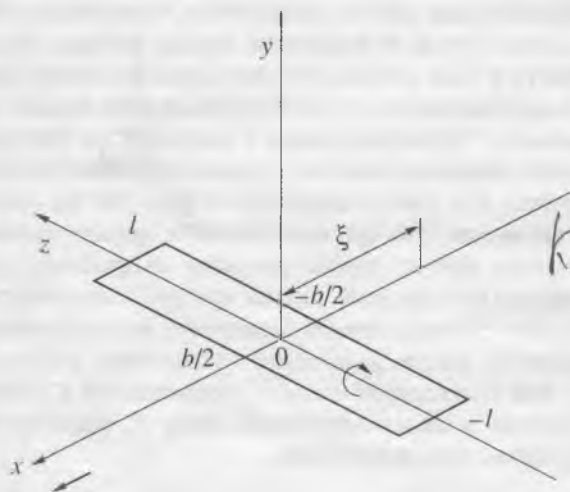


Рис. 1. Схема к постановке задачи (пояснения в тексте).

Сравнения полученной оценки “сверху” для C_{X_i} со стационарными характеристиками крыльев удлинений $\lambda = 2-5$ показывают, что реальные значения C_{X_i} действительно меньше указанной оценки и незначительно отличаются от нее. Это значит, что для крыльев таких удлинений вихревая пелена, остающаяся за крылом при его стационарном движении с некоторым углом атаки α , практически обеспечивает максимальное значение $C_{X_i} = \pi\alpha^2/2$ за счет создаваемых ею индуктивных скосов потока и, следовательно, дополнительные скосы, порождаемые вихрями, сбегаящими вследствие нестационарного движения крыла, в силу оценки (5) не смогут существенно увеличить величину C_{X_i} .

Воспользуемся такой оценкой “сверху” индуктивного сопротивления для определения подсасывающей силы X и проекции T гидродинамических сил на ось Ox колеблющегося крыла конечного размаха.

Учитывая выражения (4), можно записать с учетом профильного сопротивления:

$$T = m^* v_n \omega_z - \left(Y + m^* \frac{dv_n}{dt} \right) \frac{v_n}{V_0} - Y\vartheta - X_i - \frac{\rho V_0^2 S}{2} C_p, \quad (4)$$

где C_p – коэффициент профильного сопротивления, а индуктивное сопротивление X_i определяется выражением (5).

Пусть $V_y = dy/dt$ – поперечная скорость крыла в его центре, тогда $v_n = V_y - V_0\vartheta$ и

$$X = m^* v_n \omega_z - \left(Y + m^* \frac{dv_n}{dt} \right) \frac{v_n}{V_0} - X_i, \quad (5)$$

$$T = m^* v_n \omega_z - Y \frac{V_y}{V_0} - m^* \frac{dv_n}{dt} \frac{v_n}{V_0}.$$

Таким образом, если известны величины m^* и Y , выражения (5) и (6) позволяют оценить подсасывающую силу и проекцию гидродинамических сил на ось Ox . В каждом конкретном случае при определении X и T для Y и m^* можно воспользоваться известными численными решениями [1].

Рассмотрим случай движения прямоугольного крыла, когда на основное движение со скоростью V_0 вдоль оси Ox накладываются поперечные колебания и угловые колебания относительно точки, отстоящей на четверть хорды от передней кромки:

$$y = a \sin \omega t, \quad (7)$$

$$\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta_1 \cos \omega t. \quad (8)$$

Для T будем иметь:

$$T = X_0 - Y\vartheta - X_i - \frac{\rho V_0^2 S}{2} C_p, \quad (9)$$

для коэффициента тяги:

$$k_T = \frac{2T}{\rho S (V_0^2 + (a\omega)^2)} = k_{X_0} - k_{TC} - k_i - \frac{V_0^2 C_p}{(V_0^2 + (a\omega)^2)}, \quad (10)$$

где X_0 и k_{X_0} – соответственно подсасывающая сила и коэффициент подсасывающей силы без учета индуктивного сопротивления, k_{TC} – коэффициент тянущей силы, k_i – коэффициент индуктивного сопротивления, C_p – коэффициент формы, ϑ – угол, составляемый нормалью к плоскости крыла с осью Oy .

В каждом конкретном случае при расчете X и T можно воспользоваться известными численными решениями [1]. Значение подъемной силы в линейном приближении определяется выражением

$$Y = \frac{\rho V_0^2}{2} \times \quad (11)$$

$$\times S \left(-C_y^\alpha \frac{v_n}{V_0} - C_y^{\dot{v}_n} \frac{\dot{v}_n}{V_0^2} + C_y^{\omega_z} \frac{\omega_z b}{V_0} + C_y^{\dot{\omega}_z} \frac{\dot{\omega}_z b^2}{V_0^2} \right).$$

Здесь $\dot{\alpha}$, \dot{v}_n и $\dot{\omega}_z$ – производные по времени от величин α , v_n и ω_z . В данном случае для оценки проекции гидродинамических сил на ось Ox найдем закон движения крыла относительно его центра. Поперечная скорость центра крыла будет:

$$V_y = a\omega \cos \omega t + (b/4)\omega \vartheta_1 \sin \omega t. \quad (12)$$

Нормальная скорость в центре крыла определяется выражением

$$v_n = V_y - V_0\vartheta = (a\omega - V_0\vartheta_1) \cos \omega t + (b/4)\omega \vartheta_1 \sin \omega t - V_0\vartheta_0. \quad (13)$$

Еще несколько необходимых соотношений:

$$\dot{v}_n = -(a\omega - V_0\vartheta_1)\omega \sin \omega t + (b/4)\omega^2 \vartheta_1 \cos \omega t,$$

$$\omega_z = \dot{\vartheta} = -\vartheta_1 \omega \sin \omega t, \quad (14)$$

$$\dot{\omega}_z = -\vartheta_1 \omega^2 \cos \omega t,$$

где ϑ_1 – амплитуда угла наклона крыла к горизонтальной оси.

Коэффициенты гидродинамических производных (таблица) зависят от числа Струхала, которое имеет вид

$$sh = \frac{\omega b}{V_0}. \quad (15)$$

Определим отдельно тянущую, подсасывающую силы и индуктивное сопротивление.

Коэффициенты гидродинамических производных

| sh | C_y^α | $C_y^{\dot{\alpha}}$ | $C_y^{\omega_z}$ | $C_y^{\dot{\omega}_z}$ |
|------|--------------|----------------------|------------------|------------------------|
| 0.25 | 3.47 | 0.1 | 0.933 | -0.492 |
| 0.5 | 3.26 | 0.473 | 0.875 | -0.243 |
| 1.0 | 2.96 | 0.895 | 0.8 | -0.128 |
| 2.0 | 2.72 | 1.18 | | |

Для тянущей силы будем иметь:

$$T = -Y\vartheta = -\frac{\rho V_0^2}{2} \times S\vartheta \left(-C_y^\alpha \frac{V_n}{V_0} - C_y^{\dot{\alpha}} \frac{\dot{V}_n b}{V_0^2} + C_y^{\omega_z} \frac{\omega_z b}{V_0} + C_y^{\dot{\omega}_z} \frac{\dot{\omega}_z b^2}{V_0^2} \right). \quad (16)$$

Используя формулы (7), (8), (10) и (12)–(14), а также учитывая, что величина ϑ_1^2 очень мала, для среднего за период колебания крыла значения коэффициента тянущей силы получим следующее выражение:

$$\bar{k}_{TC} = \frac{C_y^\alpha \lambda_p^2}{\lambda_p^2 + 1} \left[\vartheta_0^2 - \frac{1}{2} \vartheta_1 \left(\frac{1}{\lambda_p} - \vartheta_1 \right) \right], \quad (17)$$

где введено обозначение

$$\lambda_p = \frac{V_0}{a\omega}. \quad (18)$$

В соответствии с выражением (6) подсасывающую силу (без учета индуктивного сопротивления) можно представить в виде

$$X_0 = m^* V_n \omega_z - \left(Y + m^* \frac{dV_n}{dt} \right) \frac{V_n}{V_0}. \quad (19)$$

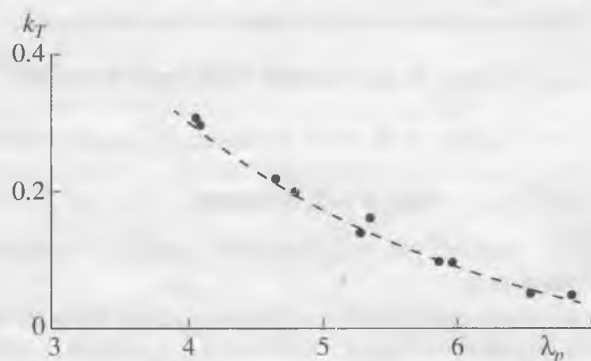


Рис. 2. Сравнение теоретической зависимости коэффициента тяги крыла k_T (пунктир) от относительной скорости движения крыла λ_p с экспериментальными данными (точки) работы [2] в случае его поперечных и угловых колебаний. Кинематические параметры движения крыла указаны в тексте.

Используя те же соотношения и условия, что и при выводе формулы (17), а также учитывая, что $C_y^{\omega_z} \ll C_y^\alpha$ (см. таблицу), получим коэффициент подсасывающей силы

$$\bar{k}_{X_0} = \frac{C_y^\alpha \lambda_p^2}{(\lambda_p^2 + 1)} \left[\vartheta_0^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda_p} - \vartheta_1 \right)^2 \right]. \quad (20)$$

Для оценки индуктивного сопротивления воспользуемся выражением (5). Используя формулы (7), (8), (10), (12) и (13), получим коэффициент индуктивного сопротивления

$$\bar{k}_{X_i} = \frac{\pi}{2} \frac{\lambda_p^2}{(\lambda_p^2 + 1)} \left[\vartheta_0^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda_p} - \vartheta_1 \right)^2 \right]. \quad (21)$$

Подставив (17), (20) и (21) в (10), получим выражение для усредненного по времени значения коэффициента тяги:

$$\bar{k}_T = \frac{\lambda_p^2}{(\lambda_p^2 + 1)} \times \left[\frac{C_y^\alpha}{2} \left(\frac{1}{\lambda_p} - \vartheta_1 \right) \frac{1}{\lambda_p} - \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{\lambda_p} - \vartheta_1 \right)^2 - \frac{\pi}{2} \vartheta_0^2 - C_p \right]. \quad (22)$$

Последние два члена в квадратных скобках правой части не зависят от переменных параметров крыла, а определяются лишь его стационарными характеристиками и могут быть объединены:

$$C_{X_0} = \frac{\pi}{2} \vartheta_0^2 + C_p. \quad (23)$$

Здесь C_{X_0} — коэффициент сопротивления крыла при стационарном движении с углом тангажа ϑ_0 .

На рис. 2 приведена теоретическая зависимость величины \bar{k}_T от λ_p для прямоугольного крыла с профилем NACA-0015 (удлинение равно 4) при $a/b = 0.285$, $\vartheta_0 = 3.7^\circ$, $\vartheta_1 = 3^\circ$, $C_{X_0} = 0.012$ (значение C_{X_0} взято из работы [2]). При этом зави-

симость коэффициента C_y^α от числа Струхала была взята из работы [1] (см. таблицу). На этом же рисунке нанесены экспериментальные точки для соответствующего движения крыла, взятые из работы [2]. Как видно, теоретические оценки хорошо согласуются с экспериментальными данными. В работе [2] приведены результаты экспериментальных исследований двух крыльев различной относительной толщины: крыла с профилем ЦАГИ КВ-1-7 относительной толщины 7% и крыла с профилем NACA-0015 относительной толщины 15%. Однако мы проводим сравнение теоретических оценок с экспериментальными пропульсивными характеристиками крыла NACA-0015

большей относительной толщины потому, что для этого крыла наиболее полно соблюдаются условия безотрывного обтекания в большом диапазоне изменений угла атаки, принятые при выводе оценочных формул. По данным эксперимента гидродинамические характеристики двух упомянутых крыльев являются близкими лишь при малых углах атаки, меньших 8° . При больших же значениях мгновенного угла атаки подсосывающая сила для тонкого крыла не реализуется в должной мере из-за частичного или полного срывного обтекания.

Рассмотрим теперь случай гармонических плоскопараллельных колебаний крыла конечного размаха. Пусть на основное движение крыла со скоростью V_0 вдоль оси Ox с углом атаки ϑ_0 наложены плоскопараллельные колебания по закону $y = a \sin \omega t$, где a – амплитуда колебаний, ω – циклическая частота. Определим среднюю за период колебаний крыла тягу. Для этого воспользуемся формулой (22), упростив ее, полагая $\vartheta_1 = 0$:

$$\bar{k}_T = \frac{\lambda_p^2}{(\lambda_p^2 + 1)} \left[\frac{1}{2} \left(C_y^\alpha - \frac{\pi}{2} \right) \frac{1}{\lambda_p^2} - C_{x_0} \right]. \quad (24)$$

На рис. 3 приведена теоретическая зависимость величины \bar{k}_T от λ_p в соответствии с формулой (24) для того же крыла, что и раньше, при $\vartheta_0 = 3.7^\circ$, и нанесены экспериментальные точки из работы [2]. Как видно, и в данном случае наблюдается хорошее согласие расчетных и экспериментальных данных.

СОСТАВЛЯЮЩИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛ В СЛУЧАЕ БОЛЬШИХ АМПЛИТУД КОЛЕБАНИЙ КРЫЛА

Рассмотрим движение крыла конечного размаха в неограниченном объеме жидкости. Пусть форма крыла в плане является симметричной относительно оси Oz и в системе координат $Oxyz$, движущейся с постоянной скоростью V_0 в направлении Ox , движение крыла задается периодическим законом колебаний $y = y(t)$, и $\vartheta = \vartheta(t)$ (рис. 1), ϑ – угол наклона крыла к плоскости Oxy , угол тангажа. Будем допускать, что при больших амплитудах поперечных и угловых колебаний мгновенные значения угла атаки малы и характер обтекания крыла безотрывный. Тогда, исходя из физических закономерностей, для составляющих гидродинамических сил будут

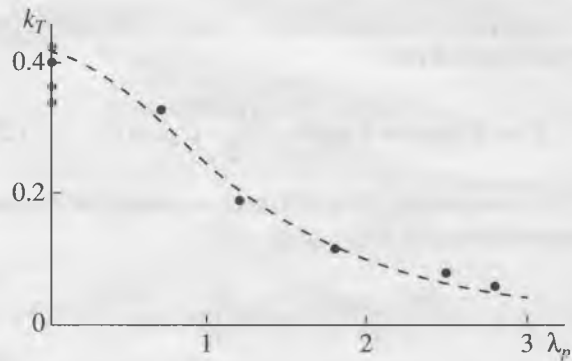


Рис. 3. Сравнение теоретической зависимости коэффициента тяги крыла k_T (пунктир) от относительной скорости движения крыла λ_p с экспериментальными данными (точки) работы [2] в случае его только поперечных колебаний. Кинематические параметры движения крыла указаны в тексте.

справедливы соотношения, аналогичные выражениям (4):

$$Y = -m^* \frac{dv_n}{dt} - \rho V \cos \alpha \int_{-l}^l \Gamma(z) dz, \quad (25)$$

$$X = m^* v_n \omega_z + \rho v_n \int_{-l}^l \Gamma(z) dz - X_i.$$

Подъемная сила Y , нормальная к плоскости крыла, включает составляющую, обусловленную влиянием инерционности среды, и циркуляционную составляющую. Вектор подсосывающей силы X в плоскости крыла перпендикулярен оси Oz . Величина X определяется значениями инерционного члена, циркуляционной составляющей и индуктивного сопротивления. Циркуляционные составляющие в соотношениях для подъемной и подсосывающей сил являются соответствующими проекциями силы Жуковского $\rho V \int_{-l}^l \Gamma(z) dz$, нормальной к вектору мгновенной скорости движения крыла V .

В выражениях (25): V – абсолютная скорость движения крыла (относительно неподвижной жидкости); v_n – нормальная к плоскости крыла составляющая скорости V ; m^* – присоединенная масса крыла; Γ – циркуляция в сечении крыла z ; ρ – плотность жидкости; $\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$.

Величины V , v_n определены в точках оси симметрии крыла Oz .

$$v_n = V_y \cos \vartheta - V_0 \sin \vartheta = V \sin \alpha, \quad (26)$$

где $V_y = dy/dt$, α – мгновенный угол атаки крыла.

Проекция составляющих гидродинамических сил на ось Ox будет:

$$T = X \cos \vartheta - Y \sin \vartheta - \frac{\rho S V^2}{2} C_p \cos \vartheta. \quad (27)$$

На основании (25) и (27) выражение для T можно представить в виде

$$T = m^* \frac{d(v_n \sin \vartheta)}{dt} + \rho V_y \int_{-l}^l \Gamma(z) dz - X_i \cos \vartheta - \frac{\rho S V^2}{2} C_p \cos \vartheta. \quad (28)$$

Из последнего соотношения следует, что при периодическом законе колебаний среднее за период колебания крыла значение T будет в основном определяться циркуляционным членом и индуктивным сопротивлением.

В линейном приближении аналогично случаю малых колебаний крыла подъемная сила Y может быть выражена в виде

$$Y = -m^* \frac{d v_n}{dt} - \rho V \cos \alpha \int_{-l}^l \Gamma(z) dz = \frac{\rho V^2}{2} S \left(-C_y^\alpha \frac{v_n}{V} - C_y^\alpha \frac{\dot{v}_n b}{V^2} + C_y^{\omega_z} \frac{\omega_z b}{V} + C_y^{\omega_z} \frac{\dot{\omega}_z b^2}{V^2} \right). \quad (29)$$

При оценках Y примем, как и раньше, что коэффициенты гидродинамических производных зависят от числа Струхала (см. таблицу) и постоянны в течение периода колебаний.

Исходя из уравнений (28) и (29), а также учитывая, что $V \sin \theta = V_y$, будем иметь:

$$T = m^* \frac{d(v_n \sin \vartheta)}{dt} + \frac{\rho S}{2} \left(C_y^\alpha v_n V_y + b \left\{ C_y^\alpha - \frac{2m^*}{\rho S b} \right\} \dot{v}_n \sin \theta - b C_y^{\omega_z} \omega_z V_y - b^2 C_y^{\omega_z} \dot{\omega}_z \sin \theta \right) - X_i \cos \vartheta - \frac{\rho S V^2}{2} C_p \cos \vartheta. \quad (30)$$

где $\theta = \alpha + \vartheta$ – угол наклона траектории движения крыла.

Определим среднее за период колебания крыла значение \bar{T} в случаях, когда:

$$1) y = a \sin \omega t, \vartheta = \vartheta_1 \cos \omega t;$$

$$2) y = a \sin \omega t, \alpha = \alpha_1 \cos \omega t.$$

Можно показать, что в рассматриваемых случаях движения крыла выполняются соотношения: а) $\overline{\dot{v}_n \sin \theta} = 0$ и б) $\overline{\omega_z V_y} = 0$:

$$\begin{aligned} \text{а) } \overline{\dot{v}_n \sin \theta} &= \overline{\frac{d(\dot{v}_n \sin \theta)}{dt}} - \overline{v_n \cos \theta \dot{\theta}} = \\ &= -\overline{V_0 \alpha \dot{\theta}} = \overline{V_0 \dot{\theta} \theta}, \\ \theta &= \arctg \frac{V_y}{V_0}, \quad \dot{\theta} = \frac{V_0 \dot{V}_y}{V_0^2 + V_y^2}. \end{aligned}$$

При законах движения 1), 2) $\int_0^\tau (-V_0 \alpha \dot{\theta}) dt = \int_0^\tau (V_0 \dot{\theta} \theta) dt = 0$. Здесь τ – период колебания крыла;

б) при законе колебаний $y = a \sin \omega t$, $\vartheta = \vartheta_1 \cos \omega t$ равенство $\overline{\omega_z V_y} = 0$ является очевидным.

В случае, когда $y = a \sin \omega t$, $\alpha = \alpha_1 \cos \omega t$,

$$\begin{aligned} \dot{\theta} V_y &= (\dot{\theta} - \dot{\alpha}) V_y = \frac{V_0 V_y \dot{V}_y}{V_0^2 + V_y^2} - \dot{\alpha} V_y, \\ \int_0^{\pi/\omega} \frac{V_0 V_y \dot{V}_y}{V_0^2 + V_y^2} dt &= 0, \quad \int_0^{\pi/\omega} \dot{\alpha} V_y dt = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае движения крыла среднее за период колебания значение T определится квазистационарным приближением:

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \frac{\rho S}{2} (C_y^\alpha \overline{v_n V_y} - C_y^{\omega_z} b^2 \overline{\dot{\omega}_z \sin \theta}) - \\ &- \overline{X_i \cos \vartheta} - \frac{\rho S}{2} C_p \overline{V^2 \cos \vartheta} \end{aligned} \quad (31)$$

или, на основании выражения (5):

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \frac{\rho S}{2} (C_y^\alpha \overline{v_n V_y} - C_y^{\omega_z} b^2 \overline{\dot{\omega}_z \sin \theta}) - \\ &- \frac{\rho \pi S}{4} \overline{v_n^2 \cos \vartheta} - \frac{\rho S}{2} C_p \overline{V^2 \cos \vartheta}. \end{aligned} \quad (32)$$

При оценке T в случае закона колебаний $y = a \sin \omega t$, $\vartheta = \vartheta_1 \cos \omega t$ можно воспользоваться выражением $v_n = V_y \cos \vartheta - V_0 \sin \vartheta$.

Раскладывая функции $\cos \vartheta$, $\sin \vartheta$ в ряд Тейлора, для среднего значения $\overline{v_n V_y}$ получим:

$$\begin{aligned} \overline{v_n V_y} = & V_0^2 \vartheta_1^2 \frac{a\omega}{V_0 \vartheta_1} \times \\ & \times \left(\frac{1}{2} \left(\frac{a\omega}{V_0 \vartheta_1} - 1 \right) - \frac{3\vartheta_1^2}{8 \cdot 2!} \left(\frac{a\omega}{V_0 \vartheta_1} - \frac{1}{3} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{5\vartheta_1^4}{16 \cdot 4!} \left(\frac{a\omega}{V_0 \vartheta_1} - \frac{1}{5} \right) - \frac{35\vartheta_1^6}{128 \cdot 6!} \left(\frac{a\omega}{V_0 \vartheta_1} - \frac{1}{7} \right) + \dots \right) \end{aligned} \quad (33)$$

или, учитывая выражение (18):

$$\begin{aligned} \overline{v_n V_y} = & V_0^2 \frac{1}{\lambda_p} \times \\ & \times \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda_p} - \vartheta_1 \right) - \frac{3\vartheta_1^2}{8 \cdot 2!} \left(\frac{1}{\lambda_p} - \frac{1}{3} \vartheta_1 \right) + \right. \\ & \left. + \frac{5\vartheta_1^4}{16 \cdot 4!} \left(\frac{1}{\lambda_p} - \frac{1}{5} \vartheta_1 \right) - \frac{35\vartheta_1^6}{128 \cdot 6!} \left(\frac{1}{\lambda_p} - \frac{1}{7} \vartheta_1 \right) + \dots \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Для оценки величины $b^2 \dot{\omega}_z \sin \theta$, входящей в формулу (32), нам понадобятся следующие соотношения:

$$\dot{\omega}_z = \frac{d^2(\vartheta)}{dt^2} = \frac{d^2(\vartheta_1 \cos \omega t)}{dt^2} = -\vartheta_1 \omega^2 \cos \omega t,$$

$$\sin \theta = \sin(\vartheta + \alpha) = \sin \vartheta \cos \alpha +$$

$$+ \cos \vartheta \sin \alpha \cong \sin \vartheta + \alpha \cos \vartheta,$$

$$\theta = \arctg \frac{V_y}{V_0},$$

$$\alpha = \arctg \frac{V_y}{V_0} - \vartheta \cong \frac{V_y}{V_0} - \frac{1}{3} \left(\frac{V_y}{V_0} \right)^3 +$$

$$+ \frac{1}{5} \left(\frac{V_y}{V_0} \right)^5 - \frac{1}{7} \left(\frac{V_y}{V_0} \right)^7 - \vartheta_1 \cos \omega t,$$

$$\cos \vartheta \cong 1 - \frac{\vartheta^2}{2} + \frac{\vartheta^4}{24}.$$

Здесь мы воспользовались разложением функций $\arctg \frac{V_y}{V_0}$ и $\cos \vartheta$ в ряд. Причем для первой функции ограничились четырьмя членами, а для второй – тремя. При этом было использовано также условие малости угла атаки.

В итоге путем несложных преобразований получаем:

$$\begin{aligned} \overline{b^2 \dot{\omega}_z \sin \theta} = & -\frac{\vartheta_1 V_0^2}{2} (sh)^2 \times \\ & \times \left[\frac{1}{\lambda_p} \left(1 - \frac{1}{4\lambda_p^2} + \frac{1}{8\lambda_p^4} - \frac{5}{64\lambda_p^6} \right) - \right. \\ & - \frac{3\vartheta_1^2}{8\lambda_p} \left(1 - \frac{5}{18\lambda_p^2} + \frac{7}{48\lambda_p^4} - \frac{3}{32\lambda_p^6} \right) + \\ & + \frac{5\vartheta_1^4}{1536\lambda_p} \left(1 - \frac{7}{3\lambda_p^2} + \frac{63}{50\lambda_p^4} - \frac{33}{40\lambda_p^6} \right) + \\ & \left. + \frac{1}{4} \vartheta_1^3 \left(1 - \frac{5}{48} \vartheta_1^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

Аналогично для выражений $\overline{v_n^2 \cos \vartheta}$ и $\overline{V^2 \cos \vartheta}$, входящих во второй и третий члены правой части формулы (32) для тяги, получим:

$$\begin{aligned} \overline{v_n^2 \cos \vartheta} = & \frac{1}{2} V_0^2 \times \\ & \times \left[\left(\frac{1}{\lambda_p} - \vartheta_1 \right)^2 - \frac{9\vartheta_1^2}{8} \left(\frac{1}{\lambda_p^2} - \frac{14\vartheta_1}{9\lambda_p} + \frac{5}{9} \vartheta_1^2 \right) + \right. \\ & \left. + \frac{15}{32} \vartheta_1^4 \left(\frac{1}{\lambda_p^2} - \frac{10\vartheta_1}{9\lambda_p} + \frac{7}{27} \vartheta_1^2 \right) - \frac{35}{1024} \vartheta_1^6 \left(\frac{1}{\lambda_p^2} - \frac{1}{3} \vartheta_1 \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (36)$$

и

$$\overline{V^2 \cos \vartheta} = V_0^2 \left(1 + \frac{1}{2\lambda_p^2} - \frac{3\vartheta_1^2}{16\lambda_p^2} - \frac{\vartheta_1^2}{4} \right). \quad (37)$$

При выводе формул (36) и (37) также использовали разложение функций $\sin \vartheta$ и $\cos \vartheta$ в ряд Тейлора, но при этом ограничились лишь первыми двумя членами разложения. В этом случае ошибка не превышает 1.6 % для реальных кинематических параметров хвостовой лопасти дельфина [7].

Первые члены в выражениях (34), (36) и (37) определяют решение задачи в рамках малоамплитудной теории и, будучи подставлены в формулу (32), после преобразования в соответствии с формулой (10) дают выражение, в точности совпадающее с формулой (22) при условии $\vartheta_0 = 0$.

Как следует из уравнений (22) и (32), оценка \bar{T} на основании малоамплитудной теории будет завышенной. Так, при $\frac{a\omega}{V_0 \vartheta_1} = 1.27$, $\vartheta_1 = 0.7$, взятых из работы [5] и соответствующих кинематике движения хвостовой лопасти дельфина, значение \bar{T} на основании формулы (22) будет более чем в

вой лопасти дельфина. Анализ показал, что крыло, похожее на лопасть дельфина, создает большую тягу (приблизительно на 15%), чем прямое, при всех равных условиях.

Мы пользуемся случаем выразить искреннюю благодарность Т.М. Борщевой за помощь при подготовке рукописи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К., Табачников В.Г. Крыло в нестационарном потоке газа. М.: Наука, 1971.

2. Гребешов Э.П., Сагоян О.А. // Тр. ЦАГИ. 1970. Вып. 1725. С. 3.
3. Зайцев А.А., Федотов А.А. // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1986. № 5. С. 75.
4. Некрасов А.И. Теория крыла в нестационарном потоке. М.: Изд-во АН СССР, 1943.
5. Романенко Е.В. Теория плавания рыб и дельфинов. М.: Наука, 1986.
6. Романенко Е.В., Пушкин С.Г. // Успехи соврем. биологии. 1997. Т. 117. Вып. 4. С. 496.
7. Романенко Е.В., Пушкин С.Г. // Докл. РАН. 1998. Т. 358. № 2. С. 274.
8. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966.
9. Chopra M. G., Kambe T. // J. Fluid Mech. 1977. V. 79. № 1. P. 49.
10. Katz J., Weihs D. // J. Fluid Mech. 1979. V. 90. № 4. P. 713.

Hydrodynamic Forces Acting on Rigid Wing Executing Great Amplitude Heaving and Pitching Oscillations

S. G. Pushkov, E. V. Romanenko

Severtsov Institute of Ecology and Evolution, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

The motion of small and great amplitude of the thin rectangular wing of finite span oscillating in combined pitch and heave in inviscid incompressible flow are determined. The loading-edge suction force and lift consist of inertial components and has a contribution from the quasisteady circulation around the wing. For harmonic motion, the formulas to estimate components of hydrodynamic forces were obtained. The small amplitude theory provides overestimated values of hydrodynamic forces (by 3–4 times) as compared with those according to the theory of arbitrary amplitude. When the amplitude of heaving and pitching motion is high, heaving and pitching harmonic oscillations determine nonharmonic variation of the attack angle.