

УДК 577.31

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ СИЛЫ, РАЗВИВАЕМЫЕ КРЫЛОМ, ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ПОЛОЖЕНИЯХ ОСИ ВРАЩЕНИЯ. ТЯГА ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ УГЛЕ АТАКИ

© 2006 г. С. Г. Пушков, Е. В. Романенко, В. Н. Лопатин

Институт проблем экологии и эволюции им. А.Н. Северцова РАН, Москва

С использованием приближенных выражений для составляющих гидродинамических сил через коэффициенты аэродинамических производных первого порядка и кинематических параметров движения построена математическая модели работы плоского жесткого крыла различного удлинения при больших амплитудах линейных и угловых колебаний и различных положениях оси вращения. Выведены расчетные формулы для тяги и подсосывающей силы в случае гармонических изменений угла атаки крыла. Показано удовлетворительное согласие результатов расчета по полученным формулам с соответствующими известными численными решениями.

В настоящее время известны всего три работы [2, 7, 8] по оценке гидродинамических сил, развиваемых жестким крылом, аппроксимирующим хвостовую лопасть дельфина и совершающим нестационарное движение с большими амплитудами линейных и угловых колебаний при произвольном положении его оси вращения. Работы [7, 8] рассматривают случай колебаний крыла при гармоническом законе изменений его угла наклона к горизонтальной оси, и лишь работа [2] исследует случай гармонического угла атаки. Задача решена численным методом для конкретных значений кинематических параметров, которые не всегда отражают реальные параметры движения хвостовой лопасти дельфина. По этой причине указанные работы не могут быть использованы для оперативной оценки гидродинамических сил, развиваемых движителем дельфина. Возникла настоятельная потребность решить упомянутую задачу аналитическим методом с получением расчетных формул, позволяющих проводить необходимые оценки при произвольных значениях кинематических параметров с достаточной точностью. В работе [3] рассмотрен случай, когда кинематические параметры движения крыла заданы относительно его центра. Однако более интересен является общий случай, когда кинематические параметры заданы относительно любой точки продольной оси крыла. Это особенно важно применительно к плаванию дельфинов и рыб с полулунным хвостовым плавником. Есть предположение, что ось вращения хвостовой лопасти дельфина расположена вблизи ее задней кромки [10]. Оценки, сделанные в работах [4, 5, 9] на основе кинематических параметров, полученных экспериментально, подтверждают это предположение. В работе [6] исследуется крыло при произвольном положении оси вращения, однако только

для случая гармонических изменений угла наклона крыла к горизонтальной оси. Не менее важен случай гармонических изменений угла атаки крыла в процессе его движения при произвольном положении оси вращения.

Рассмотрим случай, когда кинематические параметры движения крыла заданы относительно некоторой его точки x_1 , расположенной на расстоянии x от центра крыла. (Постановку задачи иллюстрирует рис. 1 в работе [3].) Движение крыла задано параметрами движения точки x_1 : амплитудой колебаний

$$y_1 = a \sin \omega t \quad (1)$$

и углом атаки

$$\alpha_1 = \alpha_0 \cos \omega t. \quad (2)$$

Для оценки гидродинамических сил, развиваемых крылом в этом случае, можно воспользоваться полученными ранее [3] исходными формулами, однако все необходимые соотношения, описывающие движение крыла, должны быть записаны относительно его центра. Закон движения такого крыла относительно центра определяется проекциями скоростей центра крыла относительно неподвижной жидкости:

$$V_{xc} = V_0 - \omega_c x \sin \vartheta, \quad (3)$$

$$V_{yc} = V_{y1} + \omega_c x \cos \vartheta, \quad (4)$$

где $V_{y1} = \dot{y}_1(t)$, $\omega_c = \dot{\vartheta}(t)$, x – расстояние от центра крыла до точки x_1 . Индекс “с” здесь и далее обозначает, что соответствующие величины пересчитаны к центру крыла. Угол наклона крыла к горизонтальной оси (ϑ) определяется выражением

$$\vartheta = \theta_1 - \alpha_1. \quad (5)$$

Угол наклона крыла не имеет индекса "с", так как он одинаков во всех точках крыла, в том числе и в точке x_1 . Поэтому он определяется кинематическими параметрами именно этой точки (мгновенным углом набегающего потока θ_1 и углом атаки α_1 в точке x_1). Входящие в формулы (3) и (4) величины $\sin \vartheta$ и $\cos \vartheta$ с учетом выражения (5) и условия малости угла атаки могут быть записаны в виде:

$$\sin \vartheta \approx \sin \theta_1 - \alpha_1 \cos \theta_1, \quad (6)$$

$$\cos \vartheta \approx \cos \theta_1 + \alpha_1 \sin \theta_1. \quad (7)$$

Здесь

$$\cos \theta_1 = U_0/U_1, \quad (8)$$

$$\sin \theta_1 = \frac{a\omega \cos \omega t}{U_1}, \quad (9)$$

$$U_1 = \sqrt{U_0^2 + (a\omega)^2 \cos^2 \omega t}, \quad (10)$$

где U_0 – постоянная скорость движения крыла, U_1 – мгновенная скорость.

Практический интерес представляет задача определения пропульсивных характеристик колеблющегося крыла в зависимости от закона его движения и положения точки x_1 . Ранее [3], когда кинематические параметры движения крыла были заданы относительно его центра, получено выражение для мгновенного значения тяги. Здесь мы представим эту формулу для случая, когда кинематические параметры движения крыла заданы относительно точки x_1 и пересчитаны к центру крыла

$$T_c = m^* \frac{d(v_{nc} \sin \vartheta)}{dt} + \frac{\rho S}{2} \left(C_y^\alpha v_{nc} V_{yc} + b \left\{ C_y^{\dot{\alpha}} - \frac{2m^*}{\rho S b} \right\} \dot{v}_{nc} \sin \theta_c - \right. \\ \left. - b C_y^{\omega_z} \omega_z V_{yc} - b^2 C_y^{\dot{\omega}_z} \dot{\omega}_z \sin \theta_c \right) - \\ - X_i \cos \vartheta - \frac{\rho S U_c^2}{2} C_p \cos \vartheta. \quad (11)$$

Здесь и далее T_c – тяга, m^* – присоединенная масса крыла, v_{nc} – нормальная скорость, ρ – плотность среды, θ_c – угол между набегающим на крыло потоком и горизонтальной осью, C_p – коэффициент сопротивления формы крыла, U_c – мгновенная скорость потока, набегающего на крыло, X_i – индуктивное сопротивление крыла, b – хорда крыла, S – его площадь (одной стороны). C_y^α , $C_y^{\dot{\alpha}}$, $C_y^{\omega_z}$, $C_y^{\dot{\omega}_z}$ – аэродинамические (гидродинамические) производные [1]. Аналогично соотношениям (3–4) выпишем выражения для других величин

$$v_{nc} = v_{n1} + \omega_z x = \alpha_1 U_1 + \omega_z x, \quad (12)$$

$$\theta_c = \alpha_c + \vartheta = \text{arctg}(V_{yc}/V_{xc}), \quad (13)$$

$$U_c^2 = V_{yc}^2 + V_{xc}^2, \quad (14)$$

$$\omega_z = -\frac{a\omega^2 U_0 \sin \omega t}{U_1^2} + \alpha_0 \omega \sin \omega t, \quad (15)$$

где α_c – угол атаки, пересчитанный к центру крыла.

Формула (11) имеет общий вид и справедлива при любых кинематических параметрах. Что касается формы крыла, то выражение (11) применимо для форм с известными значениями коэффициентов гидродинамических производных. В работе [1] приведены значения производных для трех типов крыльев: бесконечного, прямоугольного и треугольного. В линейном приближении значения коэффициентов гидродинамических производных и присоединенная масса определяются формой крыла и числом Струхала. При расчетах составляющих гидродинамических сил мы будем использовать известные численные решения для коэффициентов гидродинамических производных первого порядка, однако, в данном случае при больших амплитудах линейных и угловых колебаний крыла может иметь место увеличение ошибок результатов расчета с увеличением чисел Струхала.

Среднее по времени значение тяги крыла трудно получить в виде

$$\bar{T}_c = \frac{\rho S}{2} \left\{ C_y^\alpha \overline{v_{nc} V_{yc}} + b \left(C_y^{\dot{\alpha}} - \frac{2m^*}{\rho S b} \right) \overline{\dot{v}_{nc} \sin \theta_c} - \right. \\ \left. - C_y^{\omega_z} b^2 \overline{\dot{\omega}_z \sin \theta_c} - b C_y^{\dot{\omega}_z} \overline{\dot{\omega}_z V_{yc}} - \right. \\ \left. - \frac{\pi}{2} \overline{v_{nc}^2 \cos \vartheta} - C_p \overline{U_c^2 \cos \vartheta} \right\}. \quad (16)$$

Здесь, как и ранее [3, 6], для индуктивного сопротивления использована оценка "сверху"

$$X_i \leq \rho \pi S (v_{nc}^2/4), \quad (17)$$

являющаяся экстремумом выражения X_i ;

для крыла бесконечного размаха

$$X_i = \rho \pi b u_* (v_n - u_*), \quad (18)$$

и для крыла конечного размаха, симметричного в плане относительно оси OZ (рис. 1 в работе [3]),

$$X_i = \rho \pi \int_{-l}^l b(z) u_*(z) [v_n - u_*(z)] dz. \quad (19)$$

В этих формулах u_* – некоторая эффективная скорость, индуцируемая вихревой пеленой, оста-

ющейся в следе за крылом, v_n – нормальная скорость в центре крыла. Оценки показывают, что для крыла конечного размаха при удлинении $2 \leq \lambda \leq 5$ индуктивное сопротивление, определяемое формулой (17), завышено не более чем на 20% по сравнению с величинами, полученными в известных численных решениях, а также экспериментальным путем. Учитывая, что индуктивное сопротивление составляет весьма малую величину в балансе гидродинамических сил, развиваемых крылом, такой погрешностью в первом приближении можно пренебречь. Следует отметить, что использование формулы (17) для оценки индуктивного сопротивления в случае крыла бесконечного удлинения приводит к заниженным результатам для пропульсивных характеристик крыла в диапазоне малых чисел Струхала, что подтверждает сравнение с известными численными решениями.

Входящие в формулу (16) усредненные величины имеют вид:

$$\overline{v_{nc} V_{yc}} = \overline{v_{n1} V_{y1}} + B_1 + B_2 + B_3 + B_4, \quad (20)$$

$$\overline{v_{n1} V_{y1}} = \frac{U_0^2 \alpha_0 (2\lambda_p^2 + 1)^{1/2}}{2\sqrt{2}\lambda_p^2} \left[1 + \frac{1}{4(2\lambda_p^2 + 1)} - \frac{1}{16(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \frac{3}{128(2\lambda_p^2 + 1)^3} - \dots \right], \quad (21)$$

$$B_1 = B_0 \left\{ \frac{\alpha_0 \lambda_p^2}{\sqrt{2}(2\lambda_p^2 + 1)^{5/2}} \left[1 + \frac{1.094}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \frac{1.128}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} + \frac{0.7}{(2\lambda_p^2 + 1)^6} + \frac{0.314}{(2\lambda_p^2 + 1)^8} \right] - \frac{\alpha_0^2 \lambda_p}{\sqrt{2}(2\lambda_p^2 + 1)^{3/2}} \left[1 + \frac{0.469}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \frac{0.308}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} + \frac{0.075}{(2\lambda_p^2 + 1)^6} \right] \right\}, \quad (22)$$

$$B_2 = B_0 \left\{ \frac{2\sqrt{2}\lambda_p^3}{(2\lambda_p^2 + 1)^{5/2}} \left[1 + \frac{1.25}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \frac{2.188}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \frac{2.461}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} + \frac{3.384}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} + \frac{2.964}{(2\lambda_p^2 + 1)^5} \right] \right\}, \quad (23)$$

$$B_3 = B_0 \left\{ \frac{2\sqrt{2}\alpha_0 \lambda_p^2}{(2\lambda_p^2 + 1)^{3/2}} \left[1 + \frac{0.75}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \frac{0.938}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \frac{0.82}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} + \frac{0.923}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} + \frac{0.457}{(2\lambda_p^2 + 1)^5} \right] \right\}, \quad (24)$$

$$B_4 = B_0 \left\{ \frac{\alpha_0^2 \lambda_p}{\sqrt{2}(2\lambda_p^2 + 1)^{1/2}} \left[1 + \frac{0.25}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \frac{0.188}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \frac{0.117}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} + \frac{0.103}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} \right] \right\}, \quad (25)$$

$$B_0 = U_0^2 \text{Sh}_0^2 X^2, \quad (26)$$

$$\overline{b^2 \dot{\omega}_z \sin \theta_c} = (X^{-2}) \left(-B_2 - \frac{1}{2} B_3 \right), \quad (27)$$

$$\overline{b \dot{v}_{nc} \sin \theta_c} = (X^{-1}) (B_1 - B_2 - B_3 - B_4), \quad (28)$$

$$\overline{b \omega_z V_{yc}} = (X^{-1}) (B_1 + B_2 + B_3 + B_4), \quad (29)$$

$$\overline{v_{nc}^2 \cos \vartheta} = \overline{v_n^2 \cos \vartheta} + B_1 + B_2 + B_3 + B_4, \quad (30)$$

$$\overline{v_n^2 \cos \vartheta} = \frac{1}{2} U_0^2 \alpha_0^2 \left\{ \frac{(2\lambda_p^2 + 1)^{1/2}}{\sqrt{2}\lambda_p} \times \left[1 - \frac{0.0625}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} - \frac{0.0146}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} \right] + \frac{1}{4\sqrt{2}\lambda_p (2\lambda_p^2 + 1)} \left[1 + \frac{0.094}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} \right] + \frac{\alpha_0 (2\lambda_p^2 + 1)^{1/2}}{2\sqrt{2}\lambda_p} \left[1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{(2\lambda_p^2 + 1)} - \frac{0.125}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} \right) \right] \right\}, \quad (31)$$

$$\overline{U_c^2 \cos \vartheta} = \overline{U_1^2 \cos \vartheta} + B_1 + B_2 + B_3 + B_4, \quad (32)$$

$$\overline{U_1^2 \cos \vartheta} = U_0^2 \left(1 + \frac{1}{4\lambda_p^2} - \frac{1}{16\lambda_p^4} + \frac{7}{288\lambda_p^6} - \dots \right). \quad (33)$$

В приведенных выражениях $X = x/b$, $\text{Sh}_0 = \omega b/U_0$ – число Струхала, $\lambda_p = U_0/\omega a$.

Для присоединенной массы крыла бесконечного размаха на единицу длины имеем, как и в работе [3],

$$m^* = \rho \pi b^2/4, \quad (34)$$

для прямоугольного крыла

$$m^* \approx 0.9\rho l(\pi b^2/4), \tag{35}$$

для треугольного крыла [5]

$$m^* = \rho b^2 l/6. \tag{36}$$

Оценим долю подсасывающей силы в общей тяге (X_{xc}). В этом случае получим выражение, аналогичное выражению (38) в работе [3]

$$X_{xc} = m^* v_{nc} \omega_z \cos \vartheta - m^* \dot{v}_{nc} \alpha_c \cos \vartheta + 0.5\rho S(C_y^{\alpha} v_{nc}^2 + C_y^{\dot{\alpha}} \dot{v}_{nc} b \alpha_c - C_y^{\omega_z} \omega_z b v_{nc} - C_y^{\dot{\omega}_z} \dot{\omega}_z b^2 \alpha_c) \cos \vartheta. \tag{37}$$

Это выражение после усреднения по времени примет вид

$$\begin{aligned} \overline{X_{xc}} = & \frac{\rho S}{2} \left[\overline{(C_y^{\alpha} v_{nc}^2 \cos \vartheta - C_y^{\omega_z} \dot{\omega}_z b^2 \alpha_c \cos \vartheta)} + \right. \\ & + b \left(C_y^{\dot{\alpha}} - \frac{2m^*}{\rho S b} \right) \overline{\dot{v}_{nc} \alpha_c \cos \vartheta} + \\ & \left. + b \left(\frac{2m^*}{\rho S b} - C_y^{\omega_z} \right) \overline{v_{nc} \omega_z \cos \vartheta} \right], \tag{38} \end{aligned}$$

где усредненные величины представлены формулами: $\overline{v_{nc}^2 \cos \vartheta}$ – формулами (28) и (29),

$$\begin{aligned} \overline{\dot{\omega}_z b^2 \alpha_c \cos \vartheta} = & \frac{bA}{X} \left\{ \frac{\sqrt{2}(\lambda_p + \alpha_0)}{\lambda_p(2\lambda_p^2 + 1)^{3/2}} \times \right. \\ & \times \left[1 - \frac{0.75}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \frac{0.938}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} - \frac{0.82}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} + \right. \\ & \left. + \frac{0.923}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} \right] - \frac{\sqrt{2}}{(2\lambda_p^2 + 1)^{5/2}} \times \\ & \times \left[1 + \frac{1.094}{(2\lambda_3^2 + 1)^2} + \frac{1.128}{(2\lambda_3^2 + 1)^4} + \frac{0.7}{(2\lambda_3^2 + 1)^6} \right] + \\ & + \frac{\alpha_0}{\sqrt{2}\lambda_p(2\lambda_p^2 + 1)^{1/2}} \left[1 - \frac{0.25}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \right. \\ & \left. + \frac{0.188}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} - \frac{0.117}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} \right] \Big\}, \tag{39} \\ \overline{\dot{v}_{nc} \alpha_c \cos \vartheta} = & A \left\{ \frac{\sqrt{2}}{(2\lambda_3^2 + 1)^{3/2}} \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[(1 + 0.7\alpha_0) - \frac{0.75(1 + \alpha_0)}{(2\lambda_3^2 + 1)} + \frac{1.094 + 0.817\alpha_0}{(2\lambda_3^2 + 1)^2} - \right. \\ & - \frac{0.82(1 + \alpha_0)}{(2\lambda_3^2 + 1)^3} + \frac{(0.923 + 0.846\alpha_0)}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} - \\ & - \left. \frac{0.457(1 + \alpha_0)}{(2\lambda_p^2 + 1)^5} + \frac{(0.3 + 0.28\alpha_0)}{(2\lambda_p^2 + 1)^6} \right] - \\ & - \frac{\sqrt{2}}{(2\lambda_p^2 + 1)^{5/2}} \left[(1 + 0.5\alpha_0) - \frac{0.313\alpha_0}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \right. \\ & + \frac{(1.094 + 0.547\alpha_0)}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} - \frac{0.41\alpha_0}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} + \\ & + \left. \frac{(1.128 + 0.563\alpha_0)}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} - \frac{0.37\alpha_0}{(2\lambda_p^2 + 1)^5} + \frac{(0.7 + 0.35\alpha_0)}{(2\lambda_p^2 + 1)^6} \right] + \\ & + \frac{\alpha_0}{\sqrt{2}\lambda_p(2\lambda_p^2 + 1)^{1/2}} \left[1 + \frac{0.75\alpha_0}{\lambda_p} - \frac{0.25(\lambda_p + \alpha_0)}{\lambda_p(2\lambda_p^2 + 1)} + \right. \\ & + \frac{0.188(\lambda_p + \alpha_0)}{\lambda_p(2\lambda_p^2 + 1)^2} - \frac{0.117\lambda_p + 0.195\alpha_0}{\lambda_p(2\lambda_p^2 + 1)^3} + \\ & + \left. \frac{0.103\lambda_p + 0.094\alpha_0}{\lambda_p(2\lambda_p^2 + 1)^4} \right] + \\ & + \frac{\sqrt{2}}{(2\lambda_p^2 + 1)^{3/2}} \left[1 + \frac{0.75}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \frac{0.938}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \right. \\ & + \frac{0.82}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} + \frac{0.923}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} + \left. \frac{0.457}{(2\lambda_p^2 + 1)^5} \right] - \\ & - \frac{\alpha_0}{\sqrt{2}\lambda_p(2\lambda_p^2 + 1)^{1/2}} \left[1 + \frac{0.25}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \right. \\ & + \frac{0.188}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \frac{0.117}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} + \left. \frac{0.103}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} \right] + \\ & + \frac{2}{\sqrt{2}(2\lambda_p^2 + 1)^{5/2}} \left[1 + \frac{1.094}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \right. \\ & + \left. \frac{1.128}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} + \frac{0.7}{(2\lambda_p^2 + 1)^6} \right] \Big\}, \\ v_{nc} \omega_z \cos \vartheta = & A \left\{ \frac{\alpha_0}{\sqrt{2}\lambda_p(2\lambda_p^2 + 1)^{1/2}} \times \right. \end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left[1 + \frac{0.25}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \frac{0.188}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \frac{0.117}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} + \right. \\
 & \left. + \frac{0.103}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} \right] - \frac{2\sqrt{2}}{(2\lambda_p^2 + 1)^{3/2}} \left[1 + \frac{0.75}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \right. \\
 & \left. + \frac{0.938}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \frac{0.82}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} + \frac{0.923}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} + \right. \\
 & \left. + \frac{0.457}{(2\lambda_p^2 + 1)^5} \right] + \frac{2\sqrt{2}\lambda_p}{\alpha_0(2\lambda_p^2 + 1)^{5/2}} \left[1 + \frac{1.25}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \right. \\
 & \left. + \frac{2.188}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \frac{2.461}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} + \frac{3.384}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} + \right. \\
 & \left. + \frac{2.964}{(2\lambda_p^2 + 1)^5} \right] - \frac{\alpha_0}{\sqrt{2}\lambda_p(2\lambda_p^2 + 1)^{3/2}} \times \\
 & \times \left[1 + \frac{0.461}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \frac{0.308}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} + \frac{0.075}{(2\lambda_p^2 + 1)^6} \right] + \\
 & \left. + \frac{1}{\sqrt{2}(2\lambda_p^2 + 1)^{5/2}} \left[1 + \frac{1.094}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1.128}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} + \frac{0.7}{(2\lambda_p^2 + 1)^6} \right] \right\}. \quad (41)
 \end{aligned}$$

В приведенных формулах

$$A = \frac{\alpha_0 \text{Sh}_0^2 U_0^2 \lambda_p^2 X}{b}. \quad (42)$$

Пересчитанные к центру крыла, значения коэффициентов гидродинамических производных, входящих в приведенные выше формулы, представлены в работе [6] для трех видов крыльев: бесконечного, прямоугольного и треугольного.

Оценки показывают, что первый член в круглых скобках правой части формулы (38) превышает остальные на порядок и более. После преобразования малыми членами и усреднения по времени выражение (38) можно представить в виде

$$\overline{X_{xc}} = \frac{\rho S}{2} (C_y^\alpha \overline{v_{nc}^2 \cos \vartheta}). \quad (43)$$

В правой части формулы (43) выражение $\overline{v_{nc}^2 \cos \vartheta}$ определяется формулой (30).

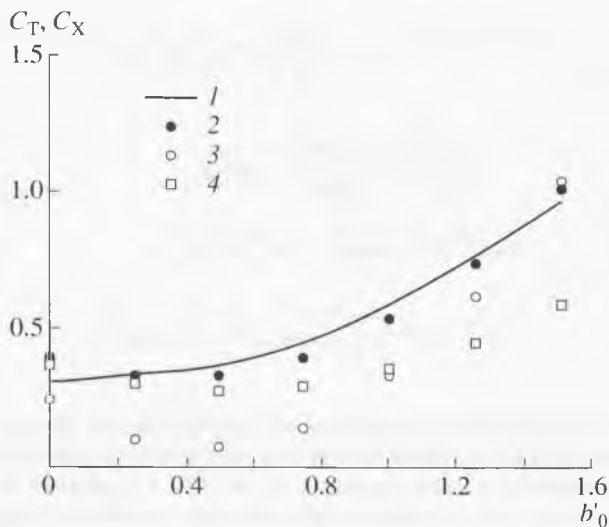
Имея выражения для тяги и подсосывающей силы, нетрудно записать формулу для тянущей силы, помня, что она равна разности между тягой и подсосывающей силой. Эта формула имеет вид

$$\begin{aligned}
 \overline{(T_c - X_{xc})} &= \frac{\rho S}{2} \left\{ C_y^\alpha \overline{v_{nc} v_{yc}} + \right. \\
 &+ b \left(C_y^{\dot{\alpha}} - \frac{2m^*}{\rho S b} \right) \overline{v_{nc} \sin \theta_c} - \\
 &- C_y^{\dot{\omega}_z} b^2 \overline{\dot{\omega}_z \sin \theta_c} - b C_y^{\dot{\omega}_z} \overline{\dot{\omega}_z v_{yc}} - \\
 &\left. - \left(\frac{\pi}{2} + C_y^{\ddot{\alpha}} \right) \overline{v_{nc}^2 \cos \vartheta} - C_p \overline{U_c^2 \cos \vartheta} \right\}. \quad (44)
 \end{aligned}$$

Результаты расчетов по полученным формулам были проверены путем численного решения исходных соотношений (16) и (38). Проверка показала, что погрешность замены сложных выражений набором относительно простых расчетных формул обусловлена использованием при их выводе условия малости угла атаки и не превышает 3%.

Возможности сравнения наших результатов с результатами, имеющимися в литературе, невелики: лишь в работе [2] численным методом решена аналогичная задача для крыла с удлинением 4 при следующих кинематических параметрах: $\text{Sh}_0 = 1$, $\lambda_p = 1$, $a/b = 1$, $\alpha_0 = 10^\circ$. На рисунке представлены результаты работы [2] (кривая 1) и наши расчеты для аналогичного крыла при гармоническом изменении угла атаки (светлые квадраты) и для бесконечного крыла (черные кружки). На рисунке показаны также значения подсосывающей силы бесконечного крыла (светлые кружки). Величина подсосывающей силы минимальна, когда ось вращения расположена в центре крыла. По мере смещения оси вращения к передней или задней кромке крыла доля подсосывающей силы в общей тяге возрастает. В случае, когда ось вращения находится за пределами крыла (за задней кромкой при $b'_0 = 1.5$), тяга может определяться исключительно подсосывающей силой. Этот результат качественно согласуется с результатами малоамплитудной теории [10].

Здесь необходимо сделать одно замечание. В формулы (16) и (38) входят коэффициенты аэродинамических (гидродинамических) производных C_y^α , $C_y^{\dot{\alpha}}$, $C_y^{\ddot{\alpha}}$, $C_y^{\dot{\omega}_z}$, $C_y^{\ddot{\omega}_z}$, таблица которых приведена в работе [6]. Однако эти производные получены для случая малоамплитудных колебаний крыла, при которых плоскость крыла и его вихревой след считаются лежащими в одной плоскости. При больших амплитудах колебаний крыла плоскости крыла и следа не совпадают. Число Струхала крыла в этом случае корректнее записывать в виде $\text{Sh} = \omega b / U$, где $U = \sqrt{U_0^2 + \omega^2 a^2}$. Именно эти значения числа Струхала учитываются при опре-



Коэффициенты тяги C_T (1, 2, 4) и подсосывающей силы C_X (3) при различном положении оси вращения крыла b'_0 для бесконечного крыла (2, 3) и с удлинением 4 (4) (1 по данным [2]) (x отсчитывается от передней кромки крыла).

делении производных по таблице в работе [6]. В формулах же (26) и (42) используют число Струхала в форме $(Sh_0) = \omega b/U_0$.

При анализе данных, представленных на рисунке, возникает вопрос: почему наши данные для крыла с удлинением, равном 4 (светлые квадраты), значительно (на 20–40%) меньше данных работы [2] для аналогичного крыла (кривая 1), в то время, как наши данные для бесконечного крыла (черные кружки) очень близки к кривой 1. Может быть два объяснения:

а) наши данные содержат значительную погрешность (до 20–40%);

б) кривая 1 представляет данные не для крыла с удлинением 4, а для бесконечного крыла. Тем не менее, можно сделать вывод, что наши данные удовлетворительно (с погрешностью не более 20–40%) согласуются с данными работы [2]. Таким образом, полученные расчетные формулы позволяют относительно легко оценить гидродинамические силы, развиваемые крылом.

Для оценки точности выведенных формул был проведен численный расчет гидродинамических сил по исходным выражениям (11) и (38). Для этого разработан алгоритм расчета, который сводится к следующему.

1. Алгоритм численного интегрирования

В настоящее время для механической квадратуры разработан целый ряд методов численного интегрирования. Обычный метод механической квадратуры состоит в том, чтобы подынтеграль-

ную функцию $f(x)$ заменить на рассматриваемом отрезке $[a, b]$ интерполирующей или аппроксимирующей функцией $\varphi(x)$ простого вида таким образом, чтобы интеграл $\int_a^b \varphi(x) dx$ вычислялся из полученного выражения непосредственно.

Однако при переходе от исходной функции $f(x)$ к более простой $\varphi(x)$ неизбежно возникают ошибки, которые оцениваются с помощью остаточного члена $R_n[f]$. Вид квадратурной формулы и величина остаточного члена $R_n[f]$ устанавливаются методом численного интегрирования. Значение остаточного члена определяется величиной производных высших порядков. Следовательно, точность расчета будет зависеть от значения производных высокого порядка на интервале интегрирования $[a, b]$.

Рассмотрим наиболее распространенную квадратурную формулу Симпсона. Она использует для аппроксимации параболу. Остаточный член

формулы равен $R = -\frac{h^5}{90} y^{IV}(\xi)$, где $\xi \in (a, a+h)$,

$h = (b-a)/n$, а n – количество интервалов разбиения. Как видно из формулы остаточного члена, формула Симпсона для достаточно гладких функций дает хорошую точность. А удачное сочетание точности с несложной квадратурной формулой обеспечивает методу широкую популярность.

В нашем случае функции $f(x)$ периодические, в связи с этим значения производных высокого порядка существенно не убывают, поэтому как величина y^{IV} , так и остаточный член имеют высокие значения, а формула Симпсона не дает необходимой точности.

Для достижения необходимой точности была применена квадратурная формула Ньютона–Котеса, объединенная с методом прямоугольников. Для этого интервал интегрирования $[a, b]$ разбивали на достаточно большое количество мелких промежутков, в которых функция $f(x)$ уже не имела выраженных периодов. К каждому интервалу применяли формулу Ньютона–Котеса. Необходимая точность интегрирования в расчетах обеспечивалась только при $n > 50$.

2. Алгоритм численного дифференцирования

Обычный метод численного дифференцирования заключается в том, чтобы дифференцируемую функцию $f(x)$ на рассматриваемом отрезке $[a, b]$ заменить интерполирующей или аппроксимирующей функцией $F(x)$ более простого вида таким образом, чтобы дифференциал $\partial F(x)/\partial x$ вычислялся из полученного выражения непосредственно. В качестве приближающей функции чаще всего выбирают полином, а затем полагают $f'(x) = F'(x)$ при $a \leq x \leq b$.

Относительно большую точность обеспечивают симметрические формулы дифференцирования, учитывающие значения функции y как при $x > x_0$, так и при $x < x_0$, где x_0 – значение аргумента, при котором необходимо вычислить производную. В качестве центральной формулы дифференцирования выбрана интерполяционная формула Стирлинга, сочетающая хорошую точность с достаточно простым алгоритмом расчета.

Пусть $\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots$ система равноотстоящих точек с шагом h , и $y_i = f(x_i)$ соответствующее значение функции $y = f(x)$. Тогда численное значение производной в точке x_0 будет равно

$$y'(x_0) = \frac{1}{h} \left(\Delta y_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6} \Delta^2 y_{\frac{3}{2}} + \frac{1}{30} \Delta^5 y_{\frac{5}{2}} \right) + R'(x_0),$$

где для краткости введены обозначения: $\Delta y_{\frac{1}{2}} =$

$$= \frac{\Delta y_{-1} + \Delta y_0}{2}, \quad \Delta^3 y_{\frac{3}{2}} = \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2}, \quad \Delta^5 y_{\frac{5}{2}} =$$

$$= \frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2},$$

а $R'(x_0)$ – погрешность производной интерполирующей функции. Конечные разности последовательности y определяются соотношениями: $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$, $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$, $\Delta^n y_i = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i$.

Точность вычислений зависит от шага h выбранной системы равноотстоящих точек $\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots$. Поэтому вычисляемое значение производной является функцией от двух аргументов $y'(x_0, h)$. Для обеспечения необходимой точности расчеты проводятся с шагом h и $h/2$. Если $y'(x_0, h) - y'(x_0, h/2) < \epsilon$, где ϵ – заданная точность вычисления производной, то расчеты заканчива-

ются, в противном случае шаг h уменьшается вдвое, а вычисления продолжаются до достижения необходимой точности.

Оценка показала, что погрешность замены сложных выражений для (16), (38) и (44) гидродинамических сил, развиваемых крылом, набором относительно простых не превышает 3%

Авторы приносят искреннюю благодарность Т.М. Борщевой за помощь в подготовке рукописи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект “а” № 04-01-00366).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К., Табачников В.Г. Крыло в нестационарном потоке газа. М.: Наука, 1971. 767 с.
2. Зайцев А.А., Федотов А.А. // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1986. № 5. С. 75.
3. Пушков С.Г., Романенко Е.В. // Успехи соврем. биологии. 2000. Т. 120. № 2. С. 207.
4. Романенко Е.В., Пушков С.Г. // Докл. РАН. 1998. Т. 358. № 2. С. 274.
5. Романенко Е.В. Гидродинамика рыб и дельфинов. М.: КМК. 2001. 412 с.
6. Романенко Е.В., Пушков С.Г., Лопатин В.Н. // Успехи соврем. биологии. 2005. Т. 125. № 5. С. 491.
7. Шеховцов А.В. // Прикладна гідромеханіка. 1999. Т. 1(73). № 2. С. 71.
8. Anderson J.M., K. Streitlien, D.S. Barrett, M.S. Triantofyllou // J. Fluid Mech. 1998. V. 360. P. 41
9. Romanenko E.V. Fish and dolphin swimming. Sofia-Moscow: PENSOFT, 2002. 430 p.
10. Wu T.Y.-T. // J. Fluid Mech. 1971. V. 46. Pt 2. P. 337.

Hydrodynamic Forces Exerted by Wing as a Function of Pitch-Axes Location. Thrust Exerted on Conditions of Harmonic Variation of Wing Attack Angle

S. G. Pushkov, E. V. Romanenko, V. N. Lopatin

Severtsov Institute of Ecology and Evolution, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

The approximate expressions of hydrodynamic forces were used for to construct a mathematical model for flat and rigid wing with different forms and aspect ratios, when the pitch-axes location varies and heaving and pitching amplitudes were rather large. The aerodynamic derivative coefficients of the first order and kinematic parameters were used in the model. The formulas to calculate the thrust and suction forces when the angle of the wing attack varied harmonically were calculated. The results of the calculations agree successfully with numerical solutions and experimental data.