

УДК 577.31

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ СИЛЫ, РАЗВИВАЕМЫЕ КРЫЛОМ, ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ПОЛОЖЕНИЯХ ОСИ ЕГО ВРАЩЕНИЯ. ТЯГА, МОЩНОСТЬ И КПД ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ЗАКОНЕ УГЛОВЫХ КОЛЕБАНИЙ

© 2009 г. Е.В. Романенко, С.Г. Пушков, В.Н. Лопатин

Институт проблем экологии и эволюции им. А.Н. Северцова РАН, Москва

С использованием приближенных выражений для составляющих гидродинамических сил через коэффициенты аэродинамических производных первого порядка и кинематических параметров движения построена математическая модель работы плоского жесткого крыла различного удлинения при больших амплитудах линейных и угловых колебаний и различных положениях оси вращения крыла. Получены расчетные формулы для вычисления коэффициентов тяги, мощности и полезного действия в случае гармонических изменений амплитуды колебаний и угла наклона крыла к горизонтальной оси. Показано хорошее совпадение результатов расчета по полученным формулам с соответствующими известными численными решениями, а также экспериментальными данными.

Теоретические оценки эффективности работы крыла как движителя, совершающего колебания большой амплитуды, в настоящее время проводят численными методами, которые требуют специальных знаний и навыков [2, 12–15, 17, 18]. В последние годы ведутся работы по созданию теории крыла на основе гидродинамических производных с получением относительно простых расчетных формул, которые позволяют проводить оперативную оценку гидродинамических сил, развиваемых жестким крылом, и его коэффициента полезного действия при больших амплитудах колебаний и произвольном положении оси вращения крыла [4–10, 16]. За основу принято решение плоской (двумерной) малоамплитудной задачи о неустановившемся движении тонкого профиля, которая была рассмотрена в частности в работах Некрасова [3] и Седова [11]. В случае малых колебаний профиля относительно некоторого основного движения авторами были получены выражения для гидродинамических сил, допускающие простое физическое толкование.

Пусть имеется тонкое крыло, движущееся в безграничном объеме несжимаемой жидкости, покоящейся на бесконечности. Движение крыла можно представить в виде основного движения со скоростью U_0 и наложенного на него добавочного движения с малыми перемещениями и скоростями. При рассмотрении движения крыла в подвижной системе координат XOY , движущейся

со скоростью U_0 , полагалось, что при колебаниях с задней кромки профиля сходит линия разрыва скоростей или вихревая пелена и на задней кромке выполняется условие Чаплыгина–Жуковского о конечности скорости. При этом были получены следующие выражения для подъемной силы Y , нормальной к линии профиля, и подсосывающей силы X , направленной вдоль линии профиля:

$$Y = -m^* \frac{dv_n}{dt} - \rho \pi b U_0 (v_n - b \omega_z / 4) - \rho \frac{b}{2} U_0 \int_{b/2}^{\infty} \frac{\gamma(\xi, t) d\xi}{\sqrt{\xi^2 - (b/2)^2}}, \quad (1)$$

$$X = \rho \pi b \left[v_n + (1/2\pi) \int_{b/2}^{\infty} \frac{\gamma(\xi, t) d\xi}{\sqrt{\xi^2 - (b/2)^2}} \right], \quad (2)$$

где $m^* = \rho \pi (b/2)^2$ – присоединенная масса профиля, b – хорда крыла, v_n – нормальная скорость в центре профиля, $\omega_z = d\vartheta/dt$ – угловая скорость, $\vartheta(t)$ – угол наклона крыла к горизонтальной оси, $\gamma(\xi, t)$ – вихревая интенсивность в следе на расстоянии ξ от центра крыла.

Несложными преобразованиями выражения (1) и (2) можно представить в виде:

$$Y = -m^* \frac{dv_n}{dt} - \rho U_0 \Gamma \quad (3)$$

$$X = m^* v_n \omega_z + \rho v_n \Gamma - \rho \pi b u_* (v_n - u_*).$$

Здесь величину $\Gamma = \pi b \left(v_n - \frac{b\omega_z}{4} - u_* \right)$ можно рассматривать как присоединенную циркуляцию, а $u_* = \frac{1}{2\pi} \int_{b/2}^{\infty} \frac{\gamma(\xi, t) d\xi}{\sqrt{\xi^2 - (b/2)^2}}$ как некоторую эффективную вызванную скорость, обусловленную наличием за крылом вихревой пелены.

Теперь рассмотрим задачу о неустановившемся движении крыла конечного размаха в постановке, аналогичной постановке в плоской задаче. При этом пусть форма крыла в плане будет симметрична относительно центральной линии $0Z$ (рис. 1).

Будем полагать, что в случае неустановившегося движения крыла конечного размаха влияние следа на гидродинамические характеристики крыла можно так же, как в плоской задаче, учесть введением некоторой эффективной индуцируемой скорости. При этом будем считать применимым метод плоских сечений и будем допускать справедливость соотношений, аналогичных (3)

$$Y = -m^* \frac{dv_n}{dt} - \rho U_0 \int_{-l}^l \Gamma(z) dz, \tag{4}$$

$$X = m^* v_n \omega_z + \rho v_n \int_{-l}^l \Gamma(z) dz - X_i,$$

где m^* – присоединенная масса крыла, $X_i = \rho \pi \int_{-l}^l b(z) f_*(z) (v_n - f_*(z)) dz$ – индуктивное “сопротивление”, f_* – некоторая эффективная ско-

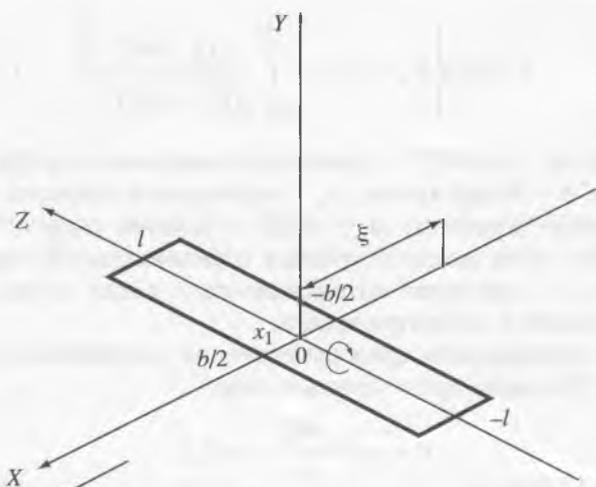


Рис. 1. Схема постановки задачи. Пояснения см. в тексте.

рость, индуцируемая вихревой пеленой, остающейся в следе, v_n – нормальная скорость крыла в точках оси симметрии крыла $0Z$, $b(z)$ – хорда крыла в сечении $z = \text{const}$, l – полуразмах крыла. Для бесконечного крыла выражение для индуктивного сопротивления будет иметь вид

$$X_i = \rho \pi b u_* (v_n - u_*). \tag{5}$$

До сих пор мы рассматривали случай малоамплитудных колебаний бесконечного крыла и крыла конечного размаха. Теперь перейдем к случаю больших амплитуд колебаний крыла.

Рассмотрим движение крыла конечного размаха в неограниченном объеме жидкости (рис. 1). Пусть форма крыла в плане является симметричной относительно оси $0Z$ и в системе координат $0XYZ$, движущейся с постоянной скоростью U_0 в направлении $0X$, движение крыла задается законом колебаний $y_1 = y_1(t)$, $\alpha = \alpha(t)$, и $\vartheta = \vartheta(t)$, ϑ – угол наклона крыла к горизонтальной оси, α – угол атаки. Будем допускать, что при больших амплитудах поперечных и угловых колебаний, мгновенные значения угла атаки являются малыми величинами, и характер обтекания крыла является безотрывным. Тогда, исходя из физических закономерностей, для составляющих гидродинамических сил в рассматриваемом случае будут справедливы соотношения, аналогичные (3):

$$Y = -m^* \frac{dv_n}{dt} - \rho U \cos \alpha \int_{-l}^l \Gamma(z) dz, \tag{6}$$

$$X = m^* v_n \omega_z + \rho v_n \int_{-l}^l \Gamma(z) dz - X_i.$$

Подъемная сила Y , нормальная к плоскости крыла, включает составляющую, обусловленную влиянием инерционности среды $-m^* \frac{dv_n}{dt}$, и циркуляционную составляющую $-\rho U \cos \alpha \int_{-l}^l \Gamma(z) dz$.

Вектор подсосывающей силы X в плоскости крыла перпендикулярен оси $0Z$. Величина X определяется значениями инерционного члена $m^* v_n \omega_z$, циркуляционного $\rho v_n \int_{-l}^l \Gamma(z) dz$ и индуктивного сопротивления $-X_i$. Циркуляционные составляющие в соотношениях для подъемной и подсосывающей сил являются соответствующими проекциями

силы Жуковского $\rho U \int_{-l}^l \Gamma(z) dz$, нормальной к вектору мгновенной скорости движения крыла U .

В выражениях (6): U – абсолютная скорость движения крыла (относительно неподвижной жидкости); v_n – нормальная к плоскости крыла составляющая скорости U ; Γ – циркуляция в сечении крыла Z ; ρ – плотность жидкости; $\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$.

Величины U , v_n определены в точках оси симметрии крыла OZ .

$$v_n = V_y \cos \vartheta - U_0 \sin \vartheta = U \sin \alpha, \quad (7)$$

где $V_y = dy_1/dt$, α – мгновенный угол атаки крыла (считается малым).

Проекция гидродинамических сил на ось OX (сила тяги) будет иметь вид:

$$F_x = X \cos \vartheta - Y \sin \vartheta - \frac{\rho S U^2}{2} C \cos \vartheta. \quad (8)$$

$$Y = -m \frac{dv_n}{dt} - \rho U \cos \alpha \int_{-l}^l \Gamma(z) dz = \frac{\rho U^2}{2} S \left(-C_y^\alpha \frac{v_n}{U} - C_y^\alpha \frac{\dot{v}_n b}{U^2} + C_y^{\omega_z} \frac{\omega_z}{U} + C_y^{\omega_z} \frac{\dot{\omega}_z b^2}{U^2} \right). \quad (10)$$

Здесь C_y^α , C_y^α , $C_y^{\omega_z}$, $C_y^{\omega_z}$ – коэффициенты гидродинамических производных [1], b и S – хорда и площадь одной стороны крыла соответственно. При оценках Y примем, что коэффициенты гидродинамических производных являются постоянными в

Здесь и далее C – удвоенный суммарный коэффициент сопротивления крыла (трения и формы), S – поверхность одной стороны крыла.

На основании (6) и (8) выражение для F_x можно представить в виде:

$$F_x = m \frac{d(v_n \sin \vartheta)}{dt} + \rho V_y \int_{-l}^l \Gamma(z) dz - X_1 \cos \vartheta - \frac{\rho S U^2}{2} C \cos \vartheta. \quad (9)$$

Из последнего соотношения следует, что при периодическом законе колебаний среднее за период колебания крыла значение тяги $\overline{F_x}$ будет в основном определяться циркуляционным членом и индуктивным сопротивлением.

В линейном приближении для подъемной силы Y может быть сделана следующая оценка [1]:

течение периода колебаний, зависящими от числа Струхала, которое имеет вид:

$$Sh_0 = \frac{\omega b}{U_0}. \quad (11)$$

Из выражения (10) получим

$$\int_{-l}^l \Gamma(z) dz = -\frac{m \dot{v}_n}{\rho U \cos \alpha} + \frac{US}{2 \cos \alpha} \left(C_y^\alpha \frac{v_n}{U} + C_y^\alpha \frac{\dot{v}_n b}{U^2} - C_y^{\omega_z} \frac{\omega_z b}{U} - C_y^{\omega_z} \frac{\dot{\omega}_z b^2}{U^2} \right). \quad (12)$$

С учетом выражения (12) получим формулу для тяги

$$F_x = m \frac{d(v_n \sin \vartheta)}{dt} + \frac{\rho S}{2 \cos \alpha} \left[C_y^\alpha v_n V_y + b \left(C_y^\alpha - \frac{2m}{\rho S b} \right) \dot{v}_n \sin \vartheta - \right. \\ \left. - C_y^{\omega_z} b \omega_z V_y - C_y^{\omega_z} b^2 \dot{\omega}_z \sin \vartheta \right] - X_1 \cos \vartheta - \frac{\rho S U^2}{2} C \cos \vartheta. \quad (13)$$

$\theta = \alpha + \vartheta$ – угол наклона траектории движения крыла.

Соотношение (13) получено в предположении, что кинематические параметры крыла заданы относительно его центра. Однако более интересен общий случай, когда кинематические параметры заданы относительно любой точки продольной оси крыла. Это особенно важно применительно к плаванию дельфинов и рыб с полулунным хвостовым плавником. Пусть в системе координат $OXYZ$,

движущейся в направлении оси OX с постоянной скоростью U_0 , движение крыла задано периодическим законом колебаний точки x_1 (рис. 1). Для оценки гидродинамических сил, развиваемых крылом в этом случае, можно воспользоваться полученным соотношением (13), однако все необходимые соотношения, описывающие движение крыла, должны быть записаны относительно его центра. Закон движения рассматриваемого крыла относительно центра определяется проекциями

скоростей центра крыла относительно неподвижной жидкости:

$$V_{xc} = U_0 - \omega_z x \sin \vartheta, \quad (14)$$

$$V_{yc} = U_{y1} + \omega_z x \cos \vartheta, \quad (15)$$

где $V_{y1} = \dot{y}_1(t)$, $\omega_z = \dot{\vartheta}(t)$, $y_1(t)$ – вертикальные колебания крыла, x – расстояние от центра крыла

до точки x_1 . Точка над буквой здесь и далее обозначает производную по времени.

Формула (13) после усреднения по времени будет иметь вид для случая, когда кинематические параметры движения крыла заданы относительно точки x_1 и пересчитаны к центру крыла (угол атаки считается малым)

$$\begin{aligned} \overline{F_{xc}} = \frac{\rho S}{2} & \left(C_y^\alpha \overline{v_{nc} V_{yc}} + b \left\{ C_y^{\dot{\alpha}} - \frac{2m^*}{\rho S b} \right\} \overline{\dot{v}_{nc} \sin \theta_c} - b C_y^{\omega_z} \overline{\omega_z V_{yc}} - b^2 C_y^{\dot{\omega}_z} \overline{\dot{\omega}_z \sin \theta_c} \right) - \\ & - \overline{X_{IC} \cos \vartheta} - \frac{\rho S}{2} \overline{U_c^2 C \cos \vartheta}. \end{aligned} \quad (16)$$

Формула (16) отличается от (13) наличием индекса “с” у тех величин, которые пересчитаны к центру крыла. Аналогично соотношениям (14) и (15) выпишем выражения для других величин

$$v_{nc} = V_{y1} \cos \vartheta - U_0 \sin \vartheta + \omega_z x = U_c \sin \alpha_c, \quad (17)$$

$$\theta_c = \alpha_c + \vartheta = \arctg(V_{yc}/V_{xc}), \quad (18)$$

$$U_c^2 = V_{yc}^2 + V_{xc}^2, \quad (19)$$

где α_c – угол атаки, пересчитанный к центру крыла.

Угол наклона крыла не имеет индекса “с”, так как он одинаков во всех точках крыла, в том числе и в точке x_1 . Поэтому он определяется кинематическими параметрами именно этой точки (мгновенным углом набегающего потока θ_1 и углом атаки α_1 в точке x_1).

Коэффициент полезного действия крыла (КПД) определяется как отношение полезной энергии к затрачиваемой

$$\eta = \frac{\overline{A_c}}{\overline{P_c}}, \quad (20)$$

где

$$\overline{A_c} = \overline{F_{xc} U}. \quad (21)$$

и

$$\overline{P_c} = -\overline{F_{yc} V_{yc}} - \overline{M_{zc} \omega_z}. \quad (22)$$

Здесь F_{xc} и F_{yc} – горизонтальная и вертикальная силы, действующие на крыло, соответственно, V_{yc} – вертикальная скорость крыла, M_{zc} – момент сил относительно оси вращения крыла, который имеет вид

$$M_{zc} = \frac{\rho S b U_c^2}{2} \left[-m_z^\alpha \alpha_c - m_z^{\dot{\alpha}} \frac{\dot{\alpha}_c b}{U_0} + m_z^{\omega_z} \frac{\omega_z b}{U_0} + m_z^{\dot{\omega}_z} \frac{\dot{\omega}_z b^2}{U_0^2} \right]. \quad (23)$$

Здесь $m_z^\alpha, m_z^{\dot{\alpha}}, m_z^{\omega_z}, m_z^{\dot{\omega}_z}$ – коэффициенты вращательных производных момента [1].

Проекция гидродинамических сил на ось OY будет иметь вид (кинематические параметры определены в центре крыла):

$$F_y = X \sin \vartheta + Y \cos \vartheta - \frac{\rho S U^2}{2} C \sin \vartheta. \quad (24)$$

Если кинематические параметры определены в произвольной точке крыла, выражение (24) примет вид (при условии малости угла атаки)

$$\begin{aligned} F_{yc} = -m^* \frac{d(v_{nc} \cos \vartheta)}{dt} + \frac{\rho S}{2} & \left[-C_y^\alpha v_{nc} V_{xc} - \left(C_y^{\dot{\alpha}} - \frac{2m^*}{\rho S b} \right) b \overline{\dot{v}_{nc} \cos \theta_c} + \right. \\ & \left. + C_y^{\omega_z} \omega_z b V_{xc} + C_y^{\dot{\omega}_z} \dot{\omega}_z b^2 \cos \theta_c \right] - \\ & - \overline{X_{ic} \sin \vartheta} - \frac{\rho S U_c^2}{2} C \sin \vartheta. \end{aligned} \quad (25)$$

Первый член в формуле (22) после усреднения по времени будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 -\overline{F_{yc} V_{yc}} = m^* V_{yc} \overline{\frac{d(v_{nc} \cos \vartheta)}{dt}} + \frac{\rho S}{2} \left[\overline{C_y^\alpha v_{nc} V_{xc} V_{yc}} + \left(C_y^\alpha - \frac{2m^*}{\rho S b} \right) \overline{b v_{nc} V_{yc} \cos \theta_c} - \right. \\
 \left. - C_y^{\omega_z} \overline{\omega_z b V_{xc} V_{yc}} - C_y^{\dot{\omega}_z} \overline{\dot{\omega}_z b^2 V_{yc} \cos \theta_c} \right] + \\
 + \overline{X_{ic} V_{yc} \sin \vartheta} + \frac{\rho S U_c^2 V_{yc}}{2} C \sin \vartheta.
 \end{aligned} \tag{26}$$

Второй член также после усреднения может быть записан в виде

$$-\overline{M_{zc} \omega_z} = \frac{\rho S b}{2} \left[m_z^\alpha \overline{\alpha_c \omega_z U_c^2} + m_z^{\dot{\alpha}_c} \frac{\overline{\dot{\alpha}_c b \omega_z U_c^2}}{U_0} - m_z^{\omega_z} \frac{\overline{\omega_z^2 b U_c^2}}{U_0} - m_z^{\dot{\omega}_z} \frac{\overline{\dot{\omega}_z \omega_z b^2 U_c^2}}{U_0^2} \right]. \tag{27}$$

Формулы (16), (26) и (27) имеют общий вид и справедливы при любых кинематических параметрах и формах крыла. Они могут быть использованы для оценки тяги и КПД крыла численными методами, что очень громоздко и требует определенной квалификации в области вычислительной математики.

Для каждого конкретного набора кинематических параметров формулы (16), (26) и (27) могут быть упрощены путем процедуры усреднения в каждом члене. В результате без большого труда можно получить набор расчетных формул и с достаточной точностью использовать для оперативной оценки гидродинамических сил и коэффициента полезного действия, развиваемых крылом. Приведем эти формулы для случая гармонических линейных и угловых колебаний крыла:

$$y_1 = y_0 \sin \omega t, \vartheta = \vartheta_0 \cos \omega t. \tag{28}$$

Формула (16) может быть представлена в форме коэффициентов тяги

$$C_T = \frac{2\overline{F_{xc}}}{\rho S U_0^2} = C_{T1} + C_{T2} + C_{T3} + C_{T4} + C_{T5} + C_{T6}. \tag{29}$$

Входящие в формулу (29) коэффициенты тяги имеют вид:

$$C_{T1} = \frac{C_y^\alpha \overline{v_{nc} V_{yc}}}{U_0^2} = C_y^\alpha \left(\frac{\overline{v_n V_{y1}}}{U_0^2} + A \right),$$

где

$$\frac{\overline{v_n V_{y1}}}{U_0^2} = \frac{1}{\lambda_p} \left[0.5 \left(\frac{1}{\lambda_p} - \vartheta_0 \right) - 0.188 \vartheta_0^2 \left(\frac{1}{\lambda_p} - 0.333 \vartheta_0 \right) + \right. \\
 \left. + 0.013 \vartheta_0^4 \left(\frac{1}{\lambda_p} - 0.2 \vartheta_0 \right) \right],$$

$$A = \frac{\vartheta_0^2 (Sh_0)^2 X^2}{2} \left[1 - \frac{\vartheta_0^2}{8} \left(1 - \frac{\vartheta_0^2}{24} \right) \right].$$

Здесь и далее $X = \frac{x}{b}$, $\lambda_p = U_0 / \omega y_0$.

$$C_{T2} = \left(C_y^\alpha - \frac{2m^*}{\rho S b} \right) \frac{\overline{b \dot{v}_{nc} \sin \theta_c}}{U_0^2} = - \left(C_y^\alpha - \frac{2m^*}{\rho S b} \right) \frac{1}{X} A,$$

$$C_{T3} = -C_y^{\omega_z} \frac{\overline{b \omega_z V_{yc}}}{U_0^2} = -C_y^{\omega_z} \frac{1}{X} A,$$

$$C_{T4} = -C_y^{\dot{\omega}_z} \frac{\overline{b^2 \dot{\omega}_z \sin \theta_c}}{U_0^2} = C_y^{\dot{\omega}_z} \frac{\sqrt{2} (Sh_0)^2 \vartheta_0}{\sqrt{2\lambda_p^2 + 1}} \left[\begin{aligned} & 0.5 - \frac{0.125}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \frac{0.0938}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} - \\ & - \frac{0.0586}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} + \frac{0.052}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} \end{aligned} \right].$$

$$C_{T5} = -\frac{\pi}{2} \frac{\overline{v_{nc}^2 \cos \vartheta}}{U_0^2} = -\frac{\pi}{2} \left(\frac{\overline{v_n^2 \cos \vartheta}}{U_0^2} + A \right),$$

где

$$\frac{\overline{v_n^2 \cos \vartheta}}{U_0^2} = 0.5 \left[\left(\frac{1}{\lambda_p} - \vartheta_0 \right)^2 - 1.125\vartheta_0^2 \left(\frac{1}{\lambda_p^2} - 1.556 \frac{\vartheta_0}{\lambda_p} + 0.556\vartheta_0^2 \right) + 0.547\vartheta_0^4 \left(\frac{1}{\lambda_p^2} - 1.162 \frac{\vartheta_0}{\lambda_p} + 0.289\vartheta_0^2 \right) - 0.137\vartheta_0^6 \left(\frac{1}{\lambda_p^2} - 0.844 \frac{\vartheta_0}{\lambda_p} + 0.144\vartheta_0^2 \right) \right].$$

В формуле для C_{T5} составляющая гидродинамических сил, обусловленная индуктивным сопротивлением крыла, определялась оценкой “сверху” [4–10,16], т.е. по максимуму:

$$X_i \leq \frac{\rho \pi S v_n^2}{4},$$

где S – площадь одной стороны крыла, v_n – нормальная скорость крыла. Было показано, что это выражение является достаточным приближением при расчетах пропульсивных характеристик крыла в случаях умеренных удлинений крыла $2 \leq \lambda \leq 5$ или когда доля индуктивного сопротивления мала в общем балансе гидродинамических сил. В общем случае, когда значения удлинения крыла не ограничиваются указанными выше пределами, может быть получено более корректное выражение для индуктивного сопротивления [6].

$$C_{T6} = -C \frac{\overline{U_c^2 \cos \vartheta}}{U_0^2} = -C \left(\frac{\overline{U_1^2 \cos \vartheta}}{U_0^2} + A \right),$$

где

$$\frac{\overline{U_1^2 \cos \vartheta}}{U_0^2} = \left(1 + \frac{0.5}{\lambda_p^2} - \frac{0.188\vartheta_0^2}{\lambda_p^2} - 0.25\vartheta_0^2 \right).$$

Здесь допущено упрощение $U_1^2 \approx U_0^2 + h_0^2 \omega^2 \cos^2 \omega t$.

Формула для присоединенной массы крыла бесконечного размаха на единицу длины имеет вид: $m^* = \rho \pi b^2 / 4$, для прямоугольного крыла: $m^* \approx 0.9 \rho l (\pi b^2 / 2)$, для треугольного крыла: $m^* = 0.9 \rho \pi b^2 l / 6$.

Формулу (22) можно представить в виде суммы коэффициентов мощности

$$C_P = \frac{2\overline{P_c}}{\rho S U_0^3} = C_{P1} + C_{P2} + C_{P3} + C_{P4} + C_{P5} + C_{P6} + C_{P7} + C_{P8} + C_{P9} + C_{P10} + C_{P11}, \tag{30}$$

которые имеют вид

$$C_{P1} = m^* \frac{2}{\rho S U_0^3} \overline{V_{yc} \frac{d(v_{nc} \cos \vartheta)}{dt}} = m^* \frac{(Sh_0)^2 \vartheta_0 X}{\rho S b} \left[\left(\frac{1}{\lambda_p} - \vartheta_0 \right) (1 - 0.375\vartheta_0^2 + 0.109\vartheta_0^4) - \frac{3\vartheta_0^2}{4\lambda_p} (1 - 0.416\vartheta_0^2 + 0.107\vartheta_0^4) - \frac{1}{\lambda_p} (1 - 0.375\vartheta_0^2 + 0.026\vartheta_0^4) + \frac{\vartheta_0^3}{4} (1 - 0.417\vartheta_0^2 + 0.079\vartheta_0^4) \right].$$

$$C_{P2} = C_y^\alpha \frac{\overline{v_{nc} V_{xc} V_{yc}}}{U_0^3} = C_y^\alpha \left\{ \frac{1}{\lambda_p} \left[\left(\frac{1}{\lambda_p} - \vartheta_0 \right) - 0.188\vartheta_0^2 \left(\frac{1}{\lambda_p} - 0.333\vartheta_0 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + 0.013\vartheta_0^4 \left(\frac{1}{\lambda_p} - 0.2\vartheta_0 \right) \dots \right] + \right. \\ \left. + (Sh_0)^2 \vartheta_0^2 X^2 \left[\begin{array}{l} 0.5 + 0.0625\vartheta_0^2 - 0.047\vartheta_0^4 - \\ - 0.25 \frac{\vartheta_0}{\lambda_p} (1 - 0.332\vartheta_0^2 + 0.08\vartheta_0^4) \end{array} \right] \right\}$$

$$C_{P3} = \left(C_y^\alpha - \frac{2m^*}{\rho S b} \right) \frac{\overline{b \dot{v}_{nc} V_{xc} \sin \theta_c}}{U_0^3} = \left(C_y^\alpha - \frac{2m^*}{\rho S b} \right) (Sh_0)^2 \vartheta_0^2 X \left[\begin{array}{l} -0.5 + 0.1875\vartheta_0^2 - 0.0547\vartheta_0^4 + \\ + \frac{\vartheta_0}{\lambda_p} (-0.125 + 0.1146\vartheta_0^2 - 0.029\vartheta_0^4) \end{array} \right]$$

$$C_{P4} = -C_y^{\omega_z} \frac{\overline{b \dot{\omega}_z V_{xc} V_{yc}}}{U_0^3} = -C_y^{\omega_z} (Sh_0)^2 \vartheta_0^2 X \left[0.5 - 0.0625\vartheta_0^2 + 0.0052\vartheta_0^4 - \frac{\vartheta_0}{\lambda_p} (0.125 - 0.0104\vartheta_0^2) \right]$$

$$C_{P5} = -C_y^{\omega_z} \frac{\overline{b^2 \dot{\omega}_z V_{xc} \sin \theta_c}}{U_0^3} = \frac{C_y^{\omega_z} (Sh_0)^2 \vartheta_0}{\sqrt{2(2\lambda_p^2 + 1)}} \left[\begin{array}{l} \left| 1 - \frac{0.25}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \frac{0.1875}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} - \right. \\ \left. - \frac{0.117}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} + \frac{0.103}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} \right| + \\ \left. + \frac{2\sqrt{2} (Sh_0)^2 \vartheta_0^3 \lambda_p^2 X^2}{\sqrt{(2\lambda_p^2 + 1)}} \left[\begin{array}{l} 0.1146 + \frac{0.0287}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \\ + \vartheta_0^2 \left(-0.0104 + \frac{0.0026}{(2\lambda_p^2 + 1)} \right) \end{array} \right] \right]$$

$$C_{P6} = \frac{\pi}{2} \frac{\overline{V_{yc} v_{nc}^2 \sin \theta}}{U_0^3} = \frac{\pi \vartheta_0}{8} \left[\begin{array}{l} \left[\frac{3}{\lambda_p^2} \left(\frac{1}{2\lambda_p} (1 - 0.972\vartheta_0^2 + 0.371\vartheta_0^4) - \right. \right. \\ \left. \left. - \vartheta_0 (1 - 0.694\vartheta_0^2 + 0.184\vartheta_0^4) \right) \right] + \\ + \vartheta_0^2 \left(\frac{3}{2\lambda_p} - (Sh_0)^2 \vartheta_0 X^2 \right) (1 - 0.417\vartheta_0^2 + 0.08\vartheta_0^4) + \\ + \frac{(Sh_0)^2 \vartheta_0^2 X^2}{\lambda_p} (1.5 - 0.625\vartheta_0^2 + 0.16\vartheta_0^4) \end{array} \right]$$

$$C_{P7} = \frac{\overline{C V_{yc} U_c^2 \sin \theta}}{U_0^3} = C \frac{\vartheta_0}{2\lambda_p} \left[\begin{array}{l} \frac{3}{4\lambda_p^2} (1 - 0.417\vartheta_0^2 + 0.018\vartheta_0^4) + \\ + (1 - 0.125\vartheta_0^2 + 0.0052\vartheta_0^4) + (Sh_0)^2 \vartheta_0 X^2 \end{array} \right]$$

$$C_{P8} = \frac{bm_z^\alpha \alpha_c U_c^2 \omega_z}{U_0^3} = m_{z1}^\alpha (Sh_0)^2 \vartheta_0^2 X \left[\frac{\sqrt{2\lambda_p^2+1}}{2\sqrt{2}\lambda_p} \left(1 - \frac{0.25}{(2\lambda_p^2+1)} - \frac{0.0625}{(2\lambda_p^2+1)^2} \right) + \frac{0.0234}{(2\lambda_p^2+1)^3} - \frac{0.0146}{(2\lambda_p^2+1)^4} \right] + \frac{1}{2\sqrt{2}\lambda_p\sqrt{2\lambda_p^2+1}} \left[\frac{0.5 - 0.125\vartheta_0^2 + \frac{0.0625\vartheta_0^2}{(2\lambda_p^2+1)}}{(2\lambda_p^2+1)^2} + \frac{0.0469}{(2\lambda_p^2+1)^2} - \frac{0.0117\vartheta_0^2}{(2\lambda_p^2+1)^2} + \frac{0.0049\vartheta_0^2}{(2\lambda_p^2+1)^3} + \frac{0.0171}{(2\lambda_p^2+1)^4} \right] - \frac{\vartheta_0}{2\sqrt{2}\sqrt{2(\lambda_p^2+1)}} \left[\frac{1 - 0.333\vartheta_0^2 + \frac{0.0052\vartheta_0^2}{(2\lambda_p^2+1)}}{(2\lambda_p^2+1)^2} + \frac{0.0117}{(2\lambda_p^2+1)^2} - \frac{0.0039\vartheta_0^2}{(2\lambda_p^2+1)^2} \right] + \frac{\lambda_p\vartheta_0^2}{\sqrt{2}\sqrt{2\lambda_p^2+1}} \left[\frac{0.25 - 0.0417\vartheta_0^2 + \frac{0.0235}{(2\lambda_p^2+1)^2}}{(2\lambda_p^2+1)^2} - \frac{0.0039\vartheta_0^2}{(2\lambda_p^2+1)^2} + \frac{0.0086}{(2\lambda_p^2+1)^4} \right] + \frac{(Sh_0)^2\vartheta_0^2\lambda_p X^2}{4\sqrt{2}\sqrt{2\lambda_p^2+1}} \left[\frac{1.5 + \frac{0.5}{(2\lambda_p^2+1)} + \frac{0.328}{(2\lambda_p^2+1)^2}}{(2\lambda_p^2+1)^3} + \frac{0.234}{(2\lambda_p^2+1)^3} + \frac{0.188}{(2\lambda_p^2+1)^4} \right]$$

$$C_{P9} = m_z^\alpha \frac{\dot{\alpha}_c \omega_z b^2 U_c^2}{U_0^4} = A_0 \left[\begin{aligned} & (0.5 - 0.125\vartheta_0^2)(1 - \vartheta_0\lambda_p) \left[1 - \frac{0.0625}{(2\lambda_p^2+1)^2} - \frac{0.0146}{(2\lambda_p^2+1)^4} \right] - \\ & - 0.5(1 - \vartheta_0\lambda_p) \left[\frac{0.25}{(2\lambda_p^2+1)} + \frac{0.0234}{(2\lambda_p^2+1)^3} + \frac{0.0085}{(2\lambda_p^2+1)^5} \right] + \\ & + 0.125\vartheta_0^2(1 - \vartheta_0\lambda_p) \left[0.5 - \frac{0.0469}{(2\lambda_p^2+1)^2} - \frac{0.0122}{(2\lambda_p^2+1)^4} \right] - \\ & - \vartheta_0^2(0.25 - 0.0208\vartheta_0^2) \left[0.5 - \frac{0.0156}{(2\lambda_p^2+1)^2} - \frac{0.0024}{(2\lambda_p^2+1)^4} \right] - \\ & - \frac{2}{(2\lambda_p^2+1)} \left[\frac{0.25 - 0.0625\vartheta_0^2 - \vartheta_0\lambda_p(0.25 - 0.0208\vartheta_0^2)}{\left(0.5 + \frac{0.0469}{(2\lambda_p^2+1)^2} \right)} \right] \end{aligned} \right]$$

где

$$A_0 = \frac{m_z^\alpha (Sh_0)^2 \vartheta_0 \sqrt{2\lambda_p^2+1}}{\sqrt{2}\lambda_p^2}$$

$$C_{P10} = -m_z^{\omega_z} \frac{\omega_z^2 U_c^2 b^2}{U_0^4} = -m_z^{\omega_z} \frac{(Sh_0)^2 \vartheta_0^2}{2} \left[1 + \frac{1}{4\lambda_p^2} + \frac{3(Sh_0)^2 \vartheta_0^2 X^2}{4} \right]$$

$$C_{p11} = m_{z1} \frac{\overline{\dot{\omega}_z \dot{\omega}_z} b^3 U_c^2}{U_0^5} =$$

$$= m_{z1} \frac{(Sh_0)^4 \vartheta_0^3 X}{2\lambda_P} \left[0.5 - 0.125\vartheta_0^2 - \frac{\vartheta_0 \lambda_P}{2} \left(1 - \frac{\vartheta_0^2}{12} \right) \right]$$

Получение расчетных формул неизбежно связано с некоторыми упрощениями и допущениями, что может приводить к погрешностям. С целью оценки величин таких погрешностей был разработан алгоритм численного расчета гидродинамических сил и КПД, развиваемых крылом, по исходным формулам (16), (26) и (27).

Как показали оценки, погрешность вычислений с помощью расчетных формул не превышает 3–5% по сравнению с вычислениями по исходным формулам (16), (26) и (27) с помощью разработанного алгоритма.

На рис. 2–10 представлено сравнение результатов численных решений по линейной и нелинейной теориям для коэффициентов тяги, мощности и полезного действия жесткого крыла [14, 15, 18, 19], экспериментальных результатов [14] и результатов вычислений по приведенным формулам (в предположении, что крыло бесконечное). Фазовый сдвиг между линейными и угловыми колебаниями равен 90°. На рис. 2,4,8 и 10 показаны результаты трех работ, с которыми проводится сравнение [14, 18, 19], а на рис. 3, 5–7, 9 – работ [14,18]. По горизонтальной оси отложены значения чисел Струхала $Sh_0 = \frac{\omega b}{U_0}$ (нижняя шкала) и

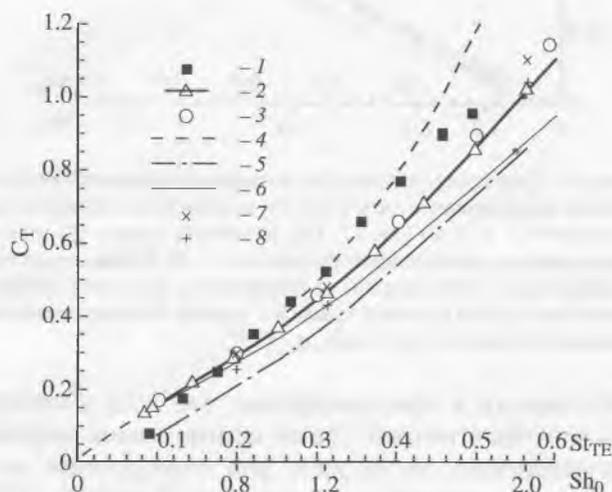


Рис. 2. Сравнение результатов экспериментального определения коэффициента тяги (1) [13], нелинейного численного решения (2, 3, 5, 6) [14, 17, 18], линейной теории (4) и вычислений по приведенным формулам (7, 8). Вычисления (7) проведены без учета сопротивления трения и формы, (8) – с учетом сопротивления крыла. Кинематические параметры крыла: $y_0/b = 0.75$, $\alpha_0 = 15^\circ$.

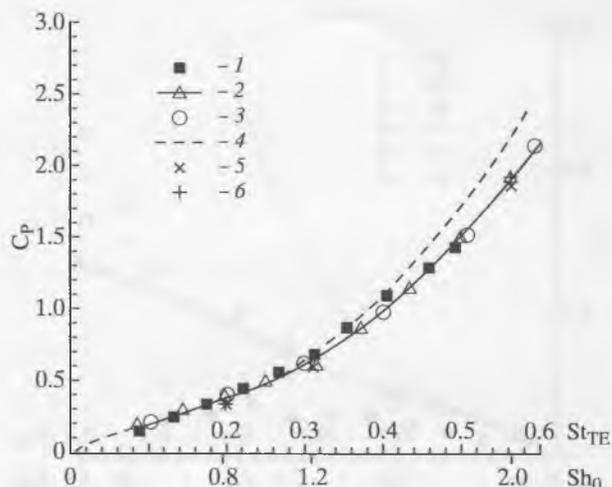


Рис. 3. Сравнение результатов экспериментального определения коэффициента мощности (1) [14], нелинейного численного решения (2, 3) [14, 17], линейной теории (4) и вычислений по приведенным формулам (5 и 6) соответственно без учета сопротивления трения и формы крыла и с учетом. Кинематические параметры крыла: $y_0/b = 0.75$, $\alpha_0 = 15^\circ$.

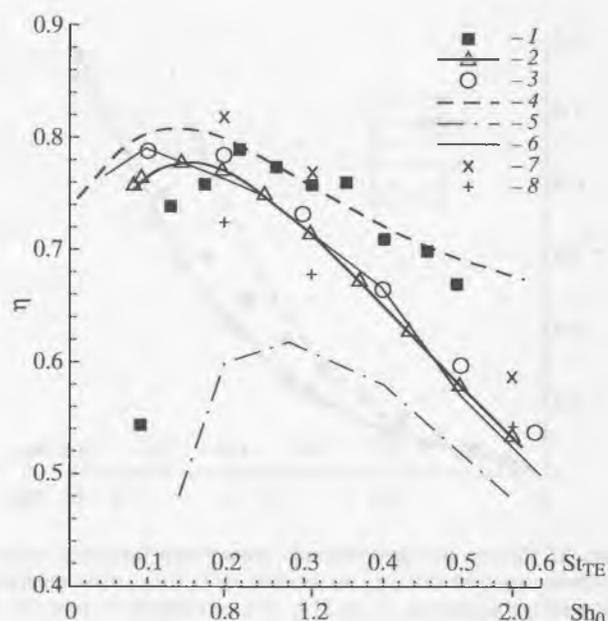


Рис. 4. Сравнение результатов экспериментального определения коэффициента полезного действия (1) [14], нелинейного численного решения (2, 3, 5, 6) [14, 17, 18], линейной теории (4) и вычислений по приведенным формулам (7, 8). Вычисления (7) проведены без учета сопротивления трения и формы, (8) – с учетом. Кинематические параметры крыла: $y_0/b = 0.75$, $\alpha_0 = 15^\circ$.

$$St_{TE} = \frac{fA_{TE}}{U_0}$$

Последняя форма числа Струхала обычно используется в иностранной научной литературе. Здесь f – частота колебаний крыла, A_{TE} – полный размах (двойная амплитуда) колебаний задней кромки крыла. Между этими дву-

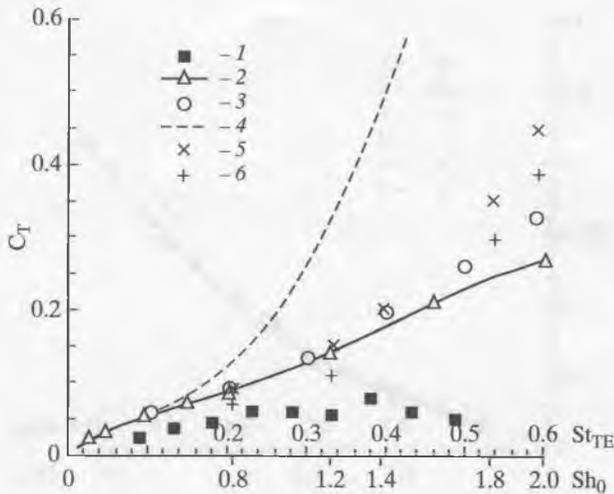


Рис. 5. Сравнение результатов экспериментального определения коэффициента тяги (1) [14], нелинейного численного решения (2, 3) [14, 17], линейной теории (4) и вычислений по приведенным формулам (5, 6): 5 – без учета сопротивления трения и формы крыла, 6 – с учетом. Кинематические параметры крыла: $y_0/b = 0.75$, $\alpha_0 = 15^\circ$.

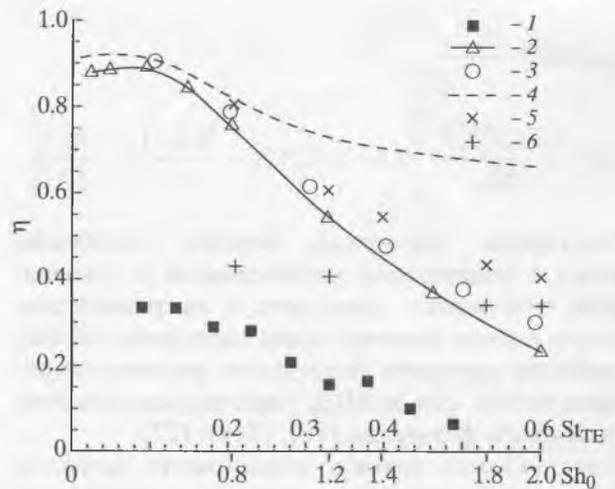


Рис. 7. Сравнение результатов экспериментального определения коэффициента полезного действия (1) [14], нелинейного численного решения (2, 2) [14, 17], линейной теории (4) и вычислений по приведенным формулам (5, 6) соответственно без учета сопротивления трения и формы крыла и с учетом. Кинематические параметры крыла: $y_0/b = 0.75$, $\alpha_0 = 15^\circ$.

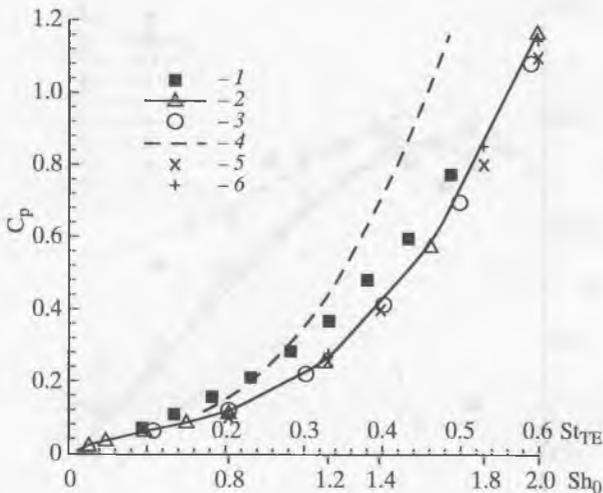


Рис. 6. Сравнение результатов экспериментального определения коэффициента мощности (1) [14], нелинейного численного решения (2, 3) [14, 17], линейной теории (4) и вычислений по приведенным формулам (5, 6) без учета сопротивления трения и формы крыла и с учетом соответственно. Кинематические параметры крыла: $y_0/b = 0.75$, $\alpha_0 = 15^\circ$.

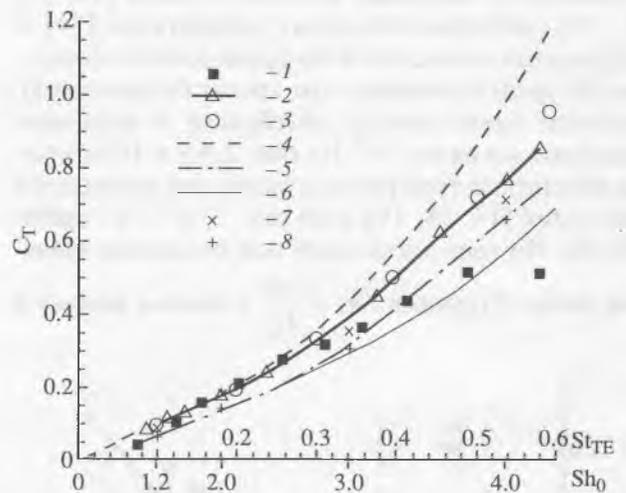


Рис. 8. Сравнение результатов экспериментального определения коэффициента тяги (1) [14], нелинейного численного решения (2, 3, 5, 6) [14, 17, 18], линейной теории (4) и вычислений по приведенным формулам (7, 8). Вычисления по формулам (7, 8) проведены соответственно без учета сопротивления трения и формы крыла и с учетом. Кинематические параметры крыла: $y_0/b = 0.25$, $\alpha_0 = 15^\circ$.

мя формами представления числа Струхала нет однозначного соответствия. Для определения величины A_{TE} необходимо составить уравнение движения задней кромки крыла и, решив его, найти амплитуду колебаний. Здесь мы не приводим этого уравнения и его решения ввиду недостатка места.

Для получения нелинейного численного решения в работе [14] использована модель идеального двумерного потока, обтекающего профиль

Жуковского в предположении, что след состоит из точечных вихрей. Далее использована теория комплексного потенциала для определения локализации вихрей и циркуляции. В работе [17] получены решения уравнений Эйлера и Навье–Стокса для трехмерного сжимаемого стационарного и нестационарного потоков. В работе [19] также использованы уравнения Навье–Стокса, но применительно к двумерному сжимаемому нестационарному потоку. Кроме того, в этой же

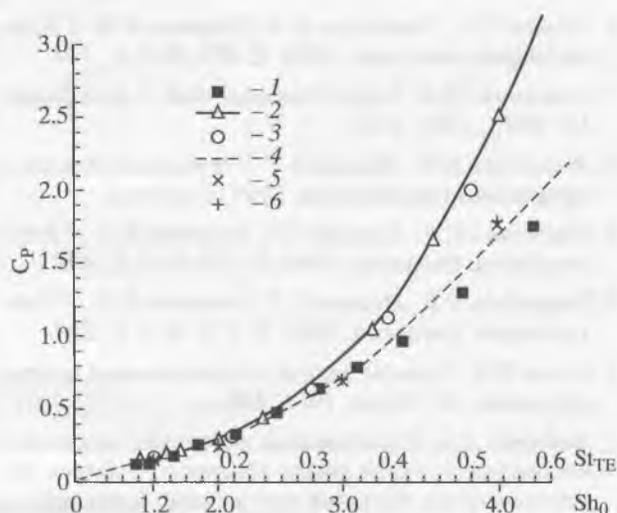


Рис. 9. Сравнение результатов экспериментального определения коэффициента мощности (1) [14], нелинейного численного решения (2, 3) [14, 17], линейной теории (4) и вычислений по приведенным формулам (5, 6) без учета сопротивления трения и формы крыла и с учетом соответственно. Кинематические параметры крыла: $y_0/b = 0.25$, $\alpha_0 = 15^\circ$.

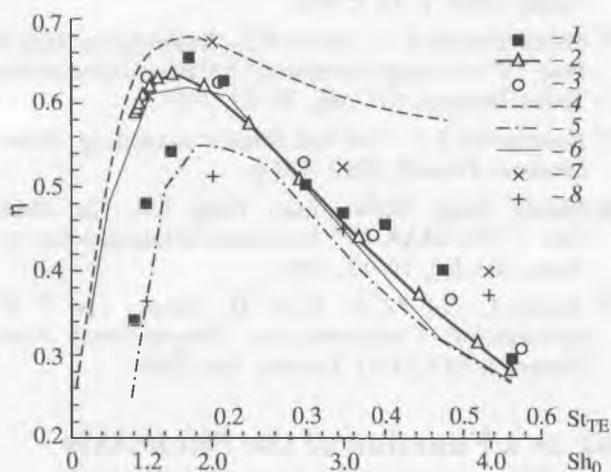


Рис. 10. Сравнение результатов экспериментального определения коэффициента тяги (1) [14], нелинейного численного решения (2, 3, 5, 6) [14, 17, 18], линейной теории (4) и вычислений по приведенным формулам (7, 8). Вычисления (7) проведены без учета сопротивления трения и формы крыла. Вычисления (8) – с учетом. Кинематические параметры крыла: $y_0/b = 0.25$, $\alpha_0 = 15^\circ$.

работе использован нестационарный панельный метод (UPM) для больших амплитуд колебаний крыла.

В эксперименте [14] использовано крыло NASA 0012, имеющее хорду, равную 10 см, и размах, равный 60 см. Удлинение крыла более 6. Ось вращения крыла расположена на расстоянии 1/3 хорды от передней кромки. Число Рейнольдса в эксперименте составляло 40000.

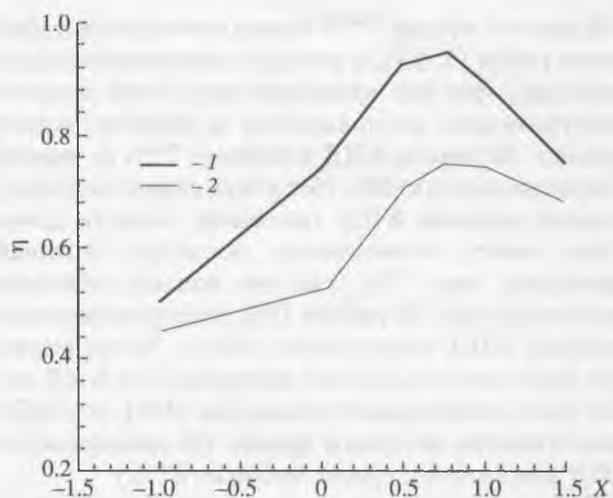


Рис. 11. Зависимость КПД жесткого треугольного крыла, моделирующего хвостовую лопасть дельфина, от относительного положения оси вращения ($X = x/b$). 1 – КПД без учета сопротивления трения и формы крыла, 2 – с учетом сопротивления.

Обращают на себя внимание два обстоятельства: во-первых, разные модели численных решений дают заметно различающиеся результаты, во-вторых, в некоторых случаях экспериментальные результаты значительно отличаются от теоретических. Последнее обстоятельство объясняется вихреобразованием на передней кромке крыла и пренебрежением силами сопротивления трения и формы крыла.

Результаты вычислений по приведенным выше формулам удовлетворительно согласуются с результатами численных решений и эксперимента.

Полученные расчетные формулы были применены для оценки коэффициента полезного действия (КПД) хвостовой лопасти дельфина как движителя. Хвостовую лопасть моделировали треугольным жестким крылом. Параметры крыла принимали такими же, какими обладает хвостовая лопасть дельфина [7, 17]: удлинение 4, скорость набегающего потока 4.3 м/с, площадь крыла 0.063 м², хорда 0.252 м, размах 0.5 м, угол наклона крыла к горизонтальной оси 38 град, угол атаки крыла 3.3 град, частота колебаний 2.23 Hz, число Рейнольдса около $1 \cdot 10^6$, $C = 0.0265$. Оценку проводили с учетом и без учета сопротивления трения и формы для различных положений оси вращения крыла: от -1 до +1.5 хорды относительно центра крыла. Индуктивное сопротивление рассчитывали по формулам, приведенным в работе [6]. На рис. 11 рассмотрена зависимость КПД крыла от положения оси вращения.

Результаты, приведенные на рис. 11, свидетельствуют о том, что максимум КПД достигается в случае, когда ось вращения находится вблизи зад-

ней кромки крыла. Этот вывод согласуется с данными работ [7, 17], в которых экспериментально показано, что ось вращения хвостовой лопасти действительно располагается в области задней кромки. Величина КПД достигает 75% (с учетом сопротивления) и 94% (без учета сопротивления). Однако реально КПД хвостовой лопасти дельфина может, по-видимому, достигать большей величины, чем 75%, так как лопасть обладает эластичностью. В работе [16] экспериментально измерен КПД эластичного крыла. Установлено, что при удачном подборе материала его КПД может быть значительно больше (на 36%), чем КПД аналогичного жесткого крыла. (В эксперименте КПД эластичного крыла достигал 87%.)

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 08-04-00358 а).

Авторы выражают искреннюю благодарность Р.И. Герасимовой за помощь в подготовке рисунков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоцерковский С.М. // Тр. ЦАГИ. 1958. Вып. 725. С. 5.
2. Зайцев А.А., Федотов А.А. // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1986. № 5. С. 75.
3. Некрасов А.И. Теория крыла в нестационарном потоке. М.: Изд-во АН СССР, 1947. 258 с.
4. Пушков С.Г., Романенко Е.В. // Успехи соврем. биологии. 2000. Т. 120. № 2. С. 207.
5. Пушков С.Г., Романенко Е.В., Лопатин В.Н. // Успехи соврем. биологии. 2006. Т. 126. № 3. С. 318.
6. Пушков С.Г., Романенко Е.В., Лопатин В.Н. // Успехи соврем. биологии. 2009. Т. 129. № 1. С. 104.
7. Романенко Е.В. Гидродинамика рыб и дельфинов. М.: КМК, 2001. 412 с.
8. Романенко Е.В., Пушков С.Г. // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2009 (в печати).
9. Романенко Е.В., Пушков С.Г., Лопатин В.Н. // Успехи соврем. биологии. 2005. Т. 125. № 5. С. 478.
10. Романенко Е.В., Пушков С.Г., Лопатин В.Н. // Успехи соврем. биологии. 2007. Т. 127. № 3. С. 299.
11. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 448 с.
12. Федотов А.А. Исследование обтекания идеальной жидкостью тонкого крыла конечного размаха, колеблющегося с большой амплитудой: Канд. дис. ... физ.-мат. наук. М.: МАИ, 1987. 117 с.
13. Шеховцов А.В. // Прикладна гідромеханіка. 1999. Том 1(73). № 2. С. 71.
14. Anderson J.M., Streitlien K., Barrett D.S., Triantafyllou M.S. // J. Fluid Mech. 1998. V. 360. P. 41.
15. Pedro G., Suleman A., Djilali N. // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2003. V. 42. P. 493.
16. Prempraneerach P., Hover F.S., Triantafyllou M.S. // Proc. 13th Int. Symp. Unmanned Untethered Submersible Techn. Durham, NH, Aug. 24–27, 2003.
17. Romanenko E.V. Fish and dolphin swimming. Sofia–Moscow: Pensoft, 2002. 430 p.
18. Shuchi Yang, Shijun Luo, Feng Liu, Her-Mann Tsai. // The AIAA 43rd Aerospace Sciences Meeting, Reno, NV, Jan. 10–13, 2005.
19. Young J., Lai J.C.S., Kaya M., Tuncer I.H. // 3rd International Conference on Computational Fluid Dynamics (ICCFD3), Toronto, July 2004.

Hydrodynamic Forces Exerted by Wing as a Function of the Pitch-Axis Location. Thrust, Power and Efficiency at Harmonic Angular Oscillations

E.V. Romanenko, S.G. Pushkov, V.N. Lopatin

Institute of Ecology and Evolution, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Approximate expressions of hydrodynamic forces were used to construct a mathematical model of a flat rigid wing with different form and aspect ratio at high amplitudes when the pitch-axis location varies and heaving and heaving and pitching amplitudes are rather high. A specific feature of this model is the use of first-order aerodynamic derivative coefficients and kinematic parameters. Formulas were derived to calculate thrust and suction forces when the wing angle varies harmonically. The results of the calculations well agree with numerical solutions and experimental data.