

УДК 571.31

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ СИЛЫ, РАЗВИВАЕМЫЕ КРЫЛОМ, ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ПОЛОЖЕНИЯХ ОСИ ЕГО ВРАЩЕНИЯ. ТЯГА, МОЩНОСТЬ И КПД ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ЗАКОНЕ ИЗМЕНЕНИЯ УГЛА АТАКИ

© 2010 г. С. Г. Пушков¹, Е. В. Романенко², В. Н. Лопатин²

¹Летно-исследовательский институт им. М.М. Громова, Московская обл.
²Институт проблем экологии и эволюции им. А.Н. Северцова РАН, Москва
E-mail: evromanenko33@mail.ru

С использованием приближенных выражений для составляющих гидродинамических сил через коэффициенты аэродинамических производных первого порядка и кинематических параметров движения построена математическая модель работы плоского жесткого крыла различного удлинения при больших амплитудах линейных и угловых колебаний и различных положениях оси вращения крыла. Получены расчетные формулы для вычисления тяги, мощности и КПД в случае гармонических изменений амплитуды колебаний и угла атаки крыла. Показано хорошее согласие результатов расчета по полученным формулам с соответствующими известными численными решениями.

Ключевые слова: плоское крыло, тяга, КПД, математическое моделирование.

Теоретические оценки эффективности работы жесткого крыла как движителя, совершающего колебания большой амплитуды, в настоящее время проводятся преимущественно численными методами, которые требуют специальных знаний и навыков в области вычислительной математики [2, 12–16, 18, 19]. Причем в большинстве публикаций рассматривается случай гармонических изменений линейных и угловых колебаний крыла. И только в трех работах [2, 12, 13] рассмотрены гармонические изменения угла атаки крыла.

В последние годы ведутся исследования по созданию метода решения краевой задачи в теории крыла на основе гидродинамических производных с получением относительно простых

расчетных формул, которые позволяют проводить оперативную оценку гидродинамических сил, развиваемых жестким крылом, и его коэффициента полезного действия при больших амплитудах колебаний и произвольном положении оси вращения [4–11, 17]. При этом не требуется знания методов численного решения интегральных уравнений, достаточно умения пользоваться простым калькулятором. В работах [4–11] детально изложена постановка задачи, поэтому здесь мы не будем на этом останавливаться. Получены также выражения для тяги и мощности колеблющегося жесткого крыла [11]. Здесь мы приведем их.

Тяга:

$$\begin{aligned} \overline{F}_{yc} = \frac{\rho S}{2} \left(C_{yl}^{\alpha} \overline{v}_{nc} \overline{V}_{yc} + b \left\{ C_{yl}^{\dot{\alpha}} - \frac{2m^*}{\rho S b} \right\} \overline{\dot{v}}_{nc} \sin \theta_c - b C_{yl}^{\omega_z} \overline{\omega}_z \overline{V}_{yc} - b^2 C_{yl}^{\dot{\omega}_z} \overline{\dot{\omega}}_z \sin \theta_c \right) - \\ - \overline{X}_{ic} \cos \vartheta - \frac{\rho S}{2} \overline{U_c^2 C \cos \vartheta}. \end{aligned} \quad (1)$$

Мощность:

$$\overline{P}_c = -\overline{F}_{yc} \overline{V}_{yc} - \overline{M}_{zc} \overline{\omega}_z. \quad (2)$$

$$\eta = \frac{\overline{A}_c}{\overline{P}_c}. \quad (3)$$

Коэффициент полезного действия:

Выражения, входящие в правую часть формулы (2), имеют вид:

$$-\overline{F_{yc} V_{yc}} = m^* V_{yc} \frac{d(\overline{v_{nc} \cos \vartheta})}{dt} + \frac{\rho S}{2} \left[C_{y1}^\alpha \overline{v_{nc} V_{xc} V_{yc}} + \left(C_{y1}^\alpha - \frac{2m^*}{\rho S b} \right) \overline{b \dot{v}_{nc} V_{yc} \cos \theta_c} - C_{y1}^{\omega_z} \overline{\omega_z b V_{xc} V_{yc}} - C_{y1}^{\dot{\omega}_z} \overline{\dot{\omega}_z b^2 V_{yc} \cos \theta_c} \right] + X_{ic} \overline{V_{yc} \sin \vartheta} + \frac{\rho S U_c^2 V_{yc}}{2} C \sin \vartheta \quad (4)$$

$$-\overline{M_{zc} \omega_z} = \frac{\rho S b}{2} \left[m_{z1}^\alpha \overline{\alpha_c \omega_z U_c^2} + m_{z1}^{\dot{\alpha}_c} \frac{\overline{\dot{\alpha}_c b \omega_z U_c^2}}{U_0} - m_{z1}^{\omega_z} \frac{\overline{\omega_z b U_c^2}}{U_0} - m_{z1}^{\dot{\omega}_z} \frac{\overline{\dot{\omega}_z \omega_z b^2 U_c^2}}{U_0^2} \right]. \quad (5)$$

Черта сверху обозначает усреднение по времени за период колебания.

Расшифруем величины, входящие в приведенные формулы

$$V_{xc} = U_0 - \omega_z x \sin \vartheta, \quad (6)$$

$$V_{yc} = V_{y1} - \omega_z x \cos \vartheta, \quad (7)$$

где U_0 – горизонтальная скорость крыла, $\vartheta(t)$ – угол наклона крыла, $V_{y1} = \dot{y}_1(t)$, $\omega_z = \dot{\vartheta}(t)$, $y_1(t)$ – вертикальные колебания крыла в точке x_1 (точка, через которую проходит ось вращения крыла), X_{ic} – индуктивное сопротивление, пересчитанное к центру крыла, x – расстояние от центра крыла до точки x_1 . C_{y1}^α , $C_{y1}^{\dot{\alpha}_c}$, $C_{y1}^{\omega_z}$, $C_{y1}^{\dot{\omega}_z}$, m_{z1}^α , $m_{z1}^{\dot{\alpha}_c}$, $m_{z1}^{\omega_z}$, $m_{z1}^{\dot{\omega}_z}$ – коэффициенты гидродинамических производных и коэффициенты вращательных производных момента [1], ρ – плотность жидкости, S – площадь одной стороны крыла, b – хорда, m^* – присоединенная масса крыла. Точка над буквой здесь и далее обозначает производную по времени.

В формулах (1–7) величины, которые пересчитаны к центру крыла, имеют индекс “с”. Угол наклона крыла не имеет индекса “с”, так как он одинаков во всех точках крыла, в том числе и в точке x_1 . Поэтому он определяется кинематическими параметрами именно этой точки (мгновенным углом набегающего потока θ_1 и углом атаки α_1 в точке x_1). Аналогично соотношениям (6) и (7) выпишем выражения для других величин:

$$v_{nc} = V_{y1} \cos \vartheta - U_0 \sin \vartheta + \omega_z x = U_c \sin \alpha_c, \quad (8)$$

$$\theta_c = \alpha_c + \vartheta = \arctg(V_{yc}/V_{xc}), \quad (9)$$

$$U_c^2 = V_{yc}^2 + V_{xc}^2, \quad (10)$$

где α_c – угол атаки, пересчитанный к центру крыла.

Формулы (1)–(10), имеют общий вид и справедливы при любых кинематических параметрах и формах крыла. Они могут быть использованы для оценки тяги и КПД крыла численными методами, что очень громоздко и требует определенной квалификации в области вычислительной математики.

Для каждого конкретного набора кинематических параметров формулы (1) и (2) могут быть упрощены путем процедуры усреднения в каждом члене. В результате без большого труда может быть получен набор расчетных формул и с достаточной точностью использован для оперативной оценки гидродинамических сил и коэффициента полезного действия, развиваемых крылом. Приведем эти формулы для случая гармонических линейных колебаний и гармонического угла атаки:

$$y_1 = y_0 \sin \omega t, \quad \alpha = \alpha_0 \cos \omega t. \quad (11)$$

Формула (1) может быть представлена в форме коэффициентов тяги

$$C_T = \frac{2\overline{F_{xc}}}{\rho S U_0^2} = C_{T1} + C_{T2} + C_{T3} + C_{T4} + C_{T5} + C_{T6}. \quad (12)$$

Входящие в формулу (12) коэффициенты тяги имеют вид:

$$C_{T1} = C_{y1}^\alpha \frac{\overline{v_{nc} V_{yc}}}{U_0^2} = C_{y1}^\alpha \left(\frac{v_{n1} V_{y1}}{U_0^2} + B_1 + B_2 + B_3 + B_4 \right),$$

$$\frac{\overline{v_{n1} V_{y1}}}{U_0^2} = \frac{\alpha_0 (2\lambda_p^2 + 1)^{1/2}}{2\sqrt{2}\lambda_p^2} \left[1 + \frac{0.25}{(2\lambda_p^2 + 1)} - \frac{0.0625}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \frac{0.0234}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} - \frac{0.0146}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} + \frac{0.0086}{(2\lambda_p^2 + 1)^5} \dots \right],$$

$$\begin{aligned}
B_1 &= B_0 \left[\frac{\alpha_0 \lambda_p^2}{\sqrt{2} (2\lambda_p^2 + 1)^{5/2}} \left[1 + \frac{1.094}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \frac{1.128}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} + \frac{0.7}{(2\lambda_p^2 + 1)^6} + \frac{0.314}{(2\lambda_p^2 + 1)^8} \right] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\alpha_0^2 \lambda_p}{\sqrt{2} (2\lambda_p^2 + 1)^{3/2}} \left[1 + \frac{0.469}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \frac{0.308}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} + \frac{0.075}{(2\lambda_p^2 + 1)^6} \right] \right], \\
B_2 &= B_0 \left[\frac{2\sqrt{2}\lambda_p^3}{(2\lambda_p^2 + 1)^{5/2}} \left[1 + \frac{1.25}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \frac{2.188}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \frac{2.461}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} + \frac{3.384}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} + \frac{2.964}{(2\lambda_p^2 + 1)^5} \right] \right], \\
B_3 &= B_0 \left[-\frac{2\sqrt{2}\alpha_0\lambda_p^2}{(2\lambda_p^2 + 1)^{3/2}} \left[1 + \frac{0.75}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \frac{0.938}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \frac{0.82}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} + \frac{0.923}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} + \frac{0.457}{(2\lambda_p^2 + 1)^5} \right] \right], \\
B_4 &= B_0 \left[\frac{\alpha_0^2 \lambda_p}{\sqrt{2} (2\lambda_p^2 + 1)^{1/2}} \left[1 + \frac{0.25}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \frac{0.188}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \frac{0.117}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} + \frac{0.103}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} \right] \right], \\
B_0 &= (Sh_0)^2 X^2, \quad C_{T2} = \left(C_y^{\alpha} - \frac{2m^*}{\rho S b} \right) \frac{\overline{b\dot{v}_{nc} \sin \theta_c}}{U_0^2} = \left(C_{y1}^{\alpha} - \frac{2m^*}{\rho S b} \right) (1/X) (B_1 - B_2 - B_3 - B_4) \\
C_{T3} &= -C_y^{\omega} \frac{\overline{b\omega_z V_{yc}}}{U_0^2} = -C_y^{\omega} (1/X) (B_1 + B_2 + B_3 + B_4), \\
C_{T4} &= -C_y^{\dot{\omega}} \frac{\overline{b^2 \dot{\omega}_z \sin \theta_c}}{U_0^2} = -C_y^{\dot{\omega}} (1/X^2) \left(-B_2 - \frac{1}{2} B_3 \right), \\
C_{T5} &= A_{T5-1} \left[1 + \frac{0.25}{(2\lambda_p^2 + 1)} - \frac{0.0625}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \frac{0.0234}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} - \frac{0.0147}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} + \frac{0.0085}{(2\lambda_p^2 + 1)^5} \right] + \\
&\quad + A_{T5-2} \left[\left[0.5 + \frac{0.5469}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \frac{0.564}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} + \frac{0.3494}{(2\lambda_p^2 + 1)^6} \right] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\alpha_0 (2\lambda_p^2 + 1)}{\lambda_p} \left[0.5 + \frac{0.2344}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} + \frac{0.1538}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} + \frac{0.0375}{(2\lambda_p^2 + 1)^6} \right] \right] + \\
&\quad + A_{T5-3} \left[\left[1.5 + \frac{5.5}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \frac{15.641}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \frac{33.516}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} + \frac{62.285}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} + \frac{96.08}{(2\lambda_p^2 + 1)^5} + \frac{169.55}{(2\lambda_p^2 + 1)^6} \right] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2\alpha_0 (2\lambda_p^2 + 1)}{\lambda_p} \left[1.5 + \frac{4.5}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \frac{10.83}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \frac{20.1}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} + \frac{34.56}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} + \frac{51.08}{(2\lambda_p^2 + 1)^5} \right] \right] + \\
&\quad + \frac{1.5\alpha_0^2 (2\lambda_p^2 + 1)^2}{\lambda_p^2} \left[1.5 + \frac{3.5}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \frac{6.89}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \frac{10.83}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} + \frac{16.13}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} + \frac{20.28}{(2\lambda_p^2 + 1)^5} \right] \\
&\quad + A_{T5-4} \left[\left[0.5 - \frac{0.688}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \frac{2.234}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} - \frac{2.793}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} + \frac{5.935}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} - \frac{6.863}{(2\lambda_p^2 + 1)^5} + \frac{11.3}{(2\lambda_p^2 + 1)^6} \right] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2\alpha_0 (2\lambda_p^2 + 1)}{\lambda_p} \left[0.5 - \frac{0.563}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \frac{1.547}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} - \frac{1.676}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} + \frac{3.142}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} - \frac{3.192}{(2\lambda_p^2 + 1)^5} \right] \right] +
\end{aligned}$$

$$+ A_{T5-5} \left\{ \left[1 + \frac{1.25}{(2\lambda_p^2+1)} + \frac{2.188}{(2\lambda_p^2+1)^2} + \frac{2.461}{(2\lambda_p^2+1)^3} + \frac{3.384}{(2\lambda_p^2+1)^4} + \frac{2.964}{(2\lambda_p^2+1)^5} + \frac{2.795}{(2\lambda_p^2+1)^6} \right] - \right. \\ \left. - \frac{\alpha_0(2\lambda_p^2+1)}{\lambda_f} \left[1 + \frac{0.75}{(2\lambda_p^2+1)} + \frac{0.938}{(2\lambda_p^2+1)^2} + \frac{0.82}{(2\lambda_p^2+1)^3} + \frac{4.219}{(2\lambda_p^2+1)^4} + \frac{0.457}{(2\lambda_p^2+1)^5} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\alpha_0(2\lambda_p^2+1)^2}{4} \left[1 + \frac{0.25}{(2\lambda_p^2+1)} + \frac{0.188}{(2\lambda_p^2+1)^2} + \frac{0.117}{(2\lambda_p^2+1)^3} + \frac{0.103}{(2\lambda_p^2+1)^4} \right] \right\} + \\ + A_{T5-6} \left[0.5 + \frac{0.547}{(2\lambda_p^2+1)^2} + \frac{0.564}{(2\lambda_p^2+1)^4} + \frac{0.349}{(2\lambda_p^2+1)^6} \right]$$

Здесь:

$$A_{T5-1} = -\frac{\pi}{2} \frac{\alpha_0^2 \sqrt{(2\lambda_p^2+1)}}{2\sqrt{2}\lambda_p}, \quad A_{T5-4} = -\frac{\pi}{2} \frac{4\sqrt{2}(Sh_0)^4 \alpha_0 \lambda_p^6 X^4}{(2\lambda_p^2+1)^5 \sqrt{(2\lambda_p^2+1)}}, \\ A_{T5-2} = -\frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{2}(Sh_0)^2 \alpha_0 \lambda_p^2 X^2}{(2\lambda_p^2+1)^2 \sqrt{(2\lambda_p^2+1)}}, \quad A_{T5-5} = -\frac{\pi}{2} \frac{2\sqrt{2}(Sh_0)^2 \lambda_p^3 X^2}{(2\lambda_p^2+1)^2 \sqrt{(2\lambda_p^2+1)}}, \\ A_{T5-3} = -\frac{\pi}{2} \frac{8\sqrt{2}(Sh_0)^4 \lambda_p^7 X^4}{(2\lambda_p^2+1)^5 \sqrt{(2\lambda_p^2+1)}}, \quad A_{T5-6} = -\frac{\pi}{2} \frac{5\sqrt{2}(Sh_0)^2 \alpha_0^2 \lambda_p^3 X^2}{(2\lambda_p^2+1)^2 \sqrt{(2\lambda_p^2+1)}}$$

$$C_{T6} = -C \frac{U_c^2 \cos \vartheta}{U_0^2} = -\frac{C \sqrt{(2\lambda_p^2+1)}}{\sqrt{2}\lambda_f} \left\{ \left(1 + \frac{\alpha_0}{2\lambda_f} \right) \left[1 - \frac{0.0625}{(2\lambda_p^2+1)^2} - \frac{0.0146}{(2\lambda_p^2+1)^4} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\alpha_0}{2\lambda_p} \left[\frac{0.25}{(2\lambda_p^2+1)} + \frac{0.0234}{(2\lambda_p^2+1)^2} + \frac{0.0085}{(2\lambda_p^2+1)^5} \right] \right\}$$

Здесь и далее введены обозначения $Sh_0 = \frac{\omega b}{U_0}$ — число Струхала, $\lambda_p = \frac{U_0}{\omega y_0}$, $C = 2(C_f + C_p)$, C_f , C_p — коэффициенты трения и формы крыла соответственно, $X = \frac{x}{b}$.

Получим расчетные формулы для коэффициентов мощности. Выражение (2) с учетом (4) и (5) может быть представлена в форме коэффициентов мощности:

$$C_P = \frac{2\bar{P}_c}{\rho S_2 U_0^3} = C_{P1} + C_{P2} + C_{P3} + C_{P4} + C_{P5} + C_{P6} + C_{P7} + C_{P8} + C_{P9} + C_{P10} + C_{P11}. \quad (13)$$

Входящие в формулу (13) коэффициенты мощности имеют вид:

$$C_{P1} = \frac{2m^*}{\rho S U_0^3} \frac{V_{yc} d(v_{nc} \cos \vartheta)}{dt} = A_{P1} \left[\begin{aligned} & 2\alpha_0 \lambda_p^2 \left[0.5 + \frac{0.375}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \frac{0.4688}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{0.4102}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} + \frac{0.4615}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} + \right. \\ & \left. + \frac{0.2283}{(2\lambda_p^2 + 1)^5} + \frac{0.15}{(2\lambda_p^2 + 1)^6} \right] - \\ & - 2\lambda_p \left[0.5 - \frac{0.375}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \frac{0.4688}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} - \frac{0.4102}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} + \right. \\ & \left. + \frac{0.4615}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} - \frac{0.2283}{(2\lambda_p^2 + 1)^5} + \frac{0.15}{(2\lambda_p^2 + 1)^6} \right] - \\ & - \frac{3\lambda_p + 2\alpha_0 - \alpha_0 \lambda_p^2}{(2\lambda_p^2 + 1)} \left[0.5 + \frac{0.5469}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{0.564}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} + \frac{0.3494}{(2\lambda_p^2 + 1)^6} \right] + \\ & + \alpha_0 (2\lambda_p^2 + 1) \left[0.5 - \frac{0.125}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \frac{0.0938}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} - \frac{0.0586}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} \right] - \\ & - \alpha_0 \left[0.25 - \frac{0.75}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \frac{0.586}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} - \frac{0.8204}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} + \frac{0.6922}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} \right] - \\ & - \frac{\alpha_0^2 \lambda_p (2\lambda_p^2 + 1)}{2} \left[1 + \frac{0.25}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \frac{0.1875}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{0.1172}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} + \frac{0.1025}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} \right] \end{aligned} \right] -$$

$$A_{P1} = \frac{2m^*}{\rho S b} \frac{\sqrt{2} (Sh_0)^2 X}{(2\lambda_p^2 + 1) \sqrt{(2\lambda_p^2 + 1)}}$$

$$C_{P2} = \frac{C_y^\alpha v_{yc} V_{Xc} V_{yc}}{U_0^3} = A_{P2} \left\{ \begin{aligned} & \left[0.5 + \frac{0.625}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \frac{1.094}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \frac{1.23}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} + \frac{1.692}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1.482}{(2\lambda_p^2 + 1)^5} + \frac{1.4}{(2\lambda_p^2 + 1)^6} + \frac{1.047}{(2\lambda_p^2 + 1)^7} \right] + \\ & + \frac{\alpha_0 (2\lambda_p^2 + 1)^2}{8\lambda_p^5 (Sh_0)^2 X^2} \left[0.5 + \frac{0.125}{(2\lambda_p^2 + 1)} - \frac{0.0313}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{0.0117}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} - \frac{0.0073}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} \right] - \\ & - \frac{\alpha_0 (2\lambda_p^2 + 1)}{\lambda_p} \left[0.5 + \frac{0.378}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \frac{0.4688}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{0.41}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} + \frac{0.461}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} \right] - \\ & - \frac{1}{4\lambda_p^2} \left[0.5 + \frac{0.5469}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \frac{0.564}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{0.3494}{(2\lambda_p^2 + 1)^6} + \frac{0.157}{(2\lambda_p^2 + 1)^8} \right] + \\ & + \frac{\alpha_0 (2\lambda_p^2 + 1)}{4\lambda_p^3} \left[0.5 + \frac{0.2344}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \frac{0.1538}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} + \frac{0.0375}{(2\lambda_p^2 + 1)^6} \right] + \\ & + \frac{3\alpha_0}{4\lambda_p} \left[0.5 - \frac{0.833}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \frac{2.052}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} - \frac{1.64}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{2.068}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} - \frac{1.98}{(2\lambda_p^2 + 1)^5} + \frac{1.75}{(2\lambda_p^2 + 1)^6} - \frac{1.396}{(2\lambda_p^2 + 1)^7} \right] \end{aligned} \right\}$$

$$A_{P2} = C_y^\alpha \frac{4\sqrt{2} (Sh_0)^2 \lambda_p^3 X^2}{(2\lambda_p^2 + 1)^2 \sqrt{(2\lambda_p^2 + 1)}}$$

$$C_{P3} = \left(C_y^{\alpha} - \frac{2m^*}{\rho S b} \right) \frac{\overline{b \dot{v}_{nc} V_{yc} \cos \theta_c}}{U_0^3} = A_{P3} \left[\begin{aligned} & \left(\frac{\alpha_0 \lambda_p - 2}{(2\lambda_p^2 + 1)} \right) \left[0.5 + \frac{0.5469}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \frac{0.564}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} + \frac{0.3494}{(2\lambda_p^2 + 1)^6} \right] + \\ & + 2\alpha_0 \lambda_p \left[\begin{aligned} & 0.5 + \frac{0.375}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \frac{0.4688}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \\ & + \frac{0.41}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} + \frac{0.4615}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} + \frac{0.2283}{(2\lambda_p^2 + 1)^5} \end{aligned} \right] - \\ & - 2 \left[\begin{aligned} & 0.5 - \frac{0.375}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \frac{0.4688}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} - \frac{0.42}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} + \\ & + \frac{0.4615}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} - \frac{0.2283}{(2\lambda_p^2 + 1)^5} + \frac{0.15}{(2\lambda_p^2 + 1)^6} \end{aligned} \right] + \\ & + \frac{\alpha_0 (2\lambda_p^2 + 1)}{\lambda_p} \left[0.5 - \frac{0.125}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \frac{0.0938}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} - \frac{0.0586}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} \right] - \\ & - \frac{1.5\alpha_0}{\lambda_p} \left[\begin{aligned} & 0.5 - \frac{0.5}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \frac{0.5468}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} - \frac{0.5468}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} + \\ & + \frac{0.564}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} - \frac{0.3044}{(2\lambda_p^2 + 1)^5} + \frac{0.1876}{(2\lambda_p^2 + 1)^6} \end{aligned} \right] - \\ & - \frac{\alpha_0}{\lambda_p (2\lambda_p^2 + 1)} \left[\begin{aligned} & 0.5 - \frac{0.3125}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \frac{0.5469}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} - \frac{0.41}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} + \\ & + \frac{0.564}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} - \frac{0.3705}{(2\lambda_p^2 + 1)^5} + \frac{0.3494}{(2\lambda_p^2 + 1)^6} \end{aligned} \right] \end{aligned} \right]$$

$$A_{P3} = \left(C_y^{\alpha} - \frac{2m^*}{\rho S b} \right) \frac{\sqrt{2} (Sh_0)^2 \lambda_p X}{(2\lambda_p^2 + 1) \sqrt{(2\lambda_p^2 + 1)}}$$

$$C_{P4} = -C_y^{\omega_z} \frac{\overline{\omega_z b V_{xc} V_{yc}}}{U_0^3} = A_{P4} \left[\begin{aligned} & \frac{\alpha_0^2 (2\lambda_p^2 + 1)^2}{2} \left[1 + \frac{0.25}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \frac{0.1875}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \frac{0.1172}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} + \frac{0.1025}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} \right] + \\ & + (2\alpha_0 \lambda_p - 1) \left[0.5 + \frac{0.5469}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \frac{0.564}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} + \frac{0.3494}{(2\lambda_p^2 + 1)^6} \right] + \\ & + \frac{\alpha_0 (2\lambda_p^2 + 1)}{\lambda_p} \left[0.5 + \frac{0.234}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \frac{0.1538}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} \right] + \\ & + 4\alpha_0 \lambda_p (2\lambda_p^2 + 1) \left[\begin{aligned} & 0.5 + \frac{0.375}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \frac{0.4688}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \frac{0.41}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} + \\ & + \frac{0.4615}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} + \frac{0.2283}{(2\lambda_p^2 + 1)^5} \end{aligned} \right] \end{aligned} \right]$$

$$A_{P4} = -C_y^{\omega_z} \frac{\sqrt{2} (Sh_0)^2 \lambda_p X}{(2\lambda_p^2 + 1)^2 \sqrt{(2\lambda_p^2 + 1)}}$$

$$C_{P5} = -C_y^{\dot{\omega}_z} \frac{b^2 \overline{\dot{\omega}_z} V_{yc} \cos \theta_c}{U_0^3} = A_{P5} \left\{ \begin{aligned} & \left[0.5 - \frac{0.375}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \frac{0.4688}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} - \frac{0.41}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} + \right. \\ & \left. + \frac{0.4615}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} - \frac{0.2283}{(2\lambda_p^2 + 1)^5} + \frac{0.15}{(2\lambda_p^2 + 1)^6} \right] + \\ & + \frac{1}{(2\lambda_p^2 + 1)} \left[\frac{0.5469}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \frac{0.564}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} + \frac{0.3494}{(2\lambda_p^2 + 1)^6} \right] - \\ & - \frac{\alpha_0(2\lambda_p^2 + 1)}{4\lambda_p} \left[1 - \frac{0.25}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \frac{0.1875}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} - \frac{0.1172}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} + \frac{0.1025}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} \right] + \\ & + \frac{\alpha_0^2 \lambda_p}{4} \left[\frac{1.5}{(2\lambda_p^2 + 1)} - \frac{1.5}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \frac{1.64}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} - \frac{1.64}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} + \frac{1.6919}{(2\lambda_p^2 + 1)^5} - \frac{0.9131}{(2\lambda_p^2 + 1)^6} + \right. \\ & \left. + \frac{0.5628}{(2\lambda_p^2 + 1)^7} - \frac{0.32}{(2\lambda_p^2 + 1)^8} + \frac{0.142}{(2\lambda_p^2 + 1)^9} \right] \end{aligned} \right.$$

$$A_{P5} = C_y^{\dot{\omega}_z} \frac{2\sqrt{2}(Sh_0)^2 \lambda_p}{(2\lambda_p^2 + 1)\sqrt{(2\lambda_p^2 + 1)}}$$

$$C_{P6} = \frac{2}{\rho S U_0^3} X_{ic} V_{yc} \sin \vartheta = \frac{\pi}{2} \frac{v_{nc}^2 V_{yc} \sin \vartheta}{U_0^3} = A_{P6} \left\{ \begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{\alpha_0 \lambda_p} \right) \left[\frac{0.5469}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \frac{0.564}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} + \frac{0.3494}{(2\lambda_p^2 + 1)^6} + \frac{0.157}{(2\lambda_p^2 + 1)^8} \right] - \\ & - \frac{(2\lambda_p^2 + 1)}{\lambda_0^2} \left[\frac{0.5469}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \frac{0.2344}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} + \frac{0.1538}{(2\lambda_p^2 + 1)^6} + \frac{0.0375}{(2\lambda_p^2 + 1)^8} \right] + \\ & + \frac{\alpha_0(2\lambda_p^2 + 1)^3}{8} \left[1.5 + \frac{0.5}{(2\lambda_p^2 + 1)} - \frac{0.1094}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} \right] \end{aligned} \right.$$

$$A_{P6} = \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{2}(Sh_0)^2 \alpha_0 \lambda_0^2 X^2}{(2\lambda_p^2 + 1)^2 \sqrt{(2\lambda_p^2 + 1)}}$$

$$C_{P7} = C \frac{U_c^2 V_{yc} \sin \vartheta}{U_0^3} = C \frac{\sqrt{(2\lambda_p^2 + 1)}}{\sqrt{2} \lambda_p^2} \left(\frac{1}{\lambda_p} - \alpha_0 \right) \left[0.5 + \frac{0.125}{(2\lambda_p^2 + 1)} - \frac{0.0316}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \frac{0.0117}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} \right]$$

$$C_{P8} = \frac{m_{z1}^\alpha b \alpha_c U_c^2 \omega_z}{U_0^3} = m_{z1}^\alpha \frac{\sqrt{2} (Sh_0)^2 X}{\sqrt{(2\lambda_p^2 + 1)}} \left[-\alpha_0 \left[1 + \frac{0.25}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \frac{0.1875}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \frac{0.1172}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} + \frac{0.1025}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} \right] + \frac{\lambda_p}{(2\lambda_p^2 + 1)} \left[1 + \frac{0.75}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \frac{0.9375}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \frac{0.82}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} + \frac{0.9223}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} + \frac{0.4565}{(2\lambda_p^2 + 1)^5} + \frac{0.3}{(2\lambda_p^2 + 1)^6} \right] + \frac{\alpha_0^2 (2\lambda_p^2 + 1)}{4\lambda_p} \left[1 - \frac{0.25}{(2\lambda_p^2 + 1)} - \frac{0.0625}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} - \frac{0.0234}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} - \frac{0.0146}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} \right] \right]$$

$$C_{P9} = m_{z1}^{\dot{\alpha}} b^2 \frac{\dot{\alpha}_c \omega_z U_c^2}{U_0^4} = m_{z1}^{\dot{\alpha}} \frac{\alpha_0 (Sh_0)^2}{2\lambda_p}$$

$$C_{P10} = -m_{z1}^{\omega_z} b^2 \frac{\omega_z^2 U_c^2}{U_0^4} = -m_{z1}^{\omega_z} (Sh_0)^2 \left[\frac{1}{(2\lambda_p^2 + 1)} \left[1 + \frac{0.5}{(2\lambda_p^2 + 1)} + \frac{0.5}{(2\lambda_p^2 + 1)^2} + \frac{0.375}{(2\lambda_p^2 + 1)^3} + \frac{0.375}{(2\lambda_p^2 + 1)^4} \right] - \frac{\alpha_0}{\lambda_p} + \frac{\alpha_0^2}{4\lambda_p^2} \left(1 - \frac{0.5}{(2\lambda_p^2 + 1)} \right) \right]$$

$$C_{P11} = 0$$

В работе [13] численным методом (усовершенствованный метод дискретных вихрей) решена задача о колебаниях плоского бесконечного жесткого крыла в невязкой и несжимаемой жидкости при следующих кинематических параметрах: $y_1 = y_0 \sin \omega t$, $\alpha = \alpha_0 \cos \omega t$, $Sh_0 = 1.0$, $\lambda_p = 1.0$, $\alpha_0 = 10^\circ = 0.1745$ рад. При этих же кинематических параметрах проведены вычисления коэффициентов тяги, мощности и КПД для того же самого крыла по приведенным формулам. Присоединенную массу крыла вычисляли по формуле $m^* = \frac{\rho \pi b^2}{4}$, приведенной в работе [11]. На рис.1 показаны

сравнительные данные для коэффициентов тяги. Там же приведены вычисленные по формулам коэффициенты мощности, а на рис. 2 – коэффициенты полезного действия.

Можно сделать вывод, что согласие результатов вычислений по нелинейной теории и по приведенным формулам вполне удовлетворительное, по крайней мере, при положении оси вращения в пределах хорды крыла. Некоторое расхождение результатов на верхней границе диапазона положений оси вращения можно объяснить большой величиной мгновенного угла атаки, о чем свидетельствует график на рис. 2 (3).

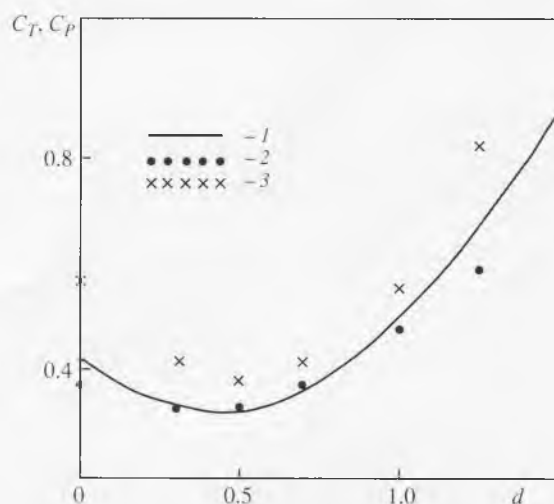


Рис. 1. Сравнение значений коэффициентов тяги – C_T , рассчитанных численным методом ранее [13] (1) и вычисленных по приведенным формулам (2). Представлены также значения коэффициентов мощности – C_P (3), вычисленные по формулам. На рис. 1 и 2 по горизонтальной оси отложено d – расстояние оси вращения крыла от передней кромки в хордах крыла.

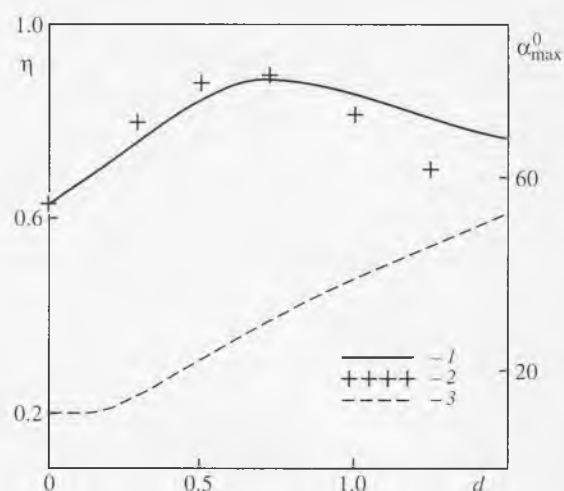


Рис. 2. Сравнение значений КПД (η), рассчитанных численным методом [13] (1) и вычисленных по приведенным формулам (2). Там же приведены значения мгновенных углов атаки крыла – α_{\max}^0 (3) по данным работы [13].

Авторы выражают искреннюю благодарность Р.И. Герасимовой за помощь в подготовке рисунков.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 08-04-00358а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белоцерковский С.М. // Тр. ЦАГИ. 1958. Вып. 725. С. 5.
2. Зайцев А.А., Федотов А.А. // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1986. № 5. С. 75.
3. Некрасов А.И. Теория крыла в нестационарном потоке. М.: Изд-во АН СССР, 1947. 258 с.
4. Пушков С.Г., Романенко Е.В. // Успехи соврем. биологии. 2000. Т. 120. № 2. С. 207.
5. Пушков С.Г., Романенко Е.В., Лопатин В.Н. // Успехи соврем. биологии. 2006. Т. 126. № 3. С. 318.
6. Пушков С.Г., Романенко Е.В., Лопатин В.Н. // Успехи соврем. биологии. 2009. Т. 129. № 1. С. 104.
7. Романенко Е.В. Гидродинамика рыб и дельфинов. М.: КМК, 2001. 412 с.
8. Романенко Е.В., Пушков С.Г. // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2008. № 2. С. 13.
9. Романенко Е.В., Пушков С.Г., Лопатин В.Н. // Успехи соврем. биологии. 2005. Т. 125. № 5. С. 478.
10. Романенко Е.В., Пушков С.Г., Лопатин В.Н. // Успехи соврем. биологии. 2007. Т. 127. № 3. С. 299.
11. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 448 с.
12. Федотов А.А. Исследование обтекания идеальной жидкостью тонкого крыла конечного размаха, колеблющегося с большой амплитудой: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. М., МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1987. 17 с.
13. Шеховцов А.В. // Прикладна гідромеханіка. 1999. Т. 1(73). № 2. С. 71.
14. Anderson J.M., Streitlien K., Barrett D.S., Triantafyllou M.S. // J. Fluid Mech. 1998. V. 360. P. 41.
15. Pedro G., Suleman A., Djilati N. // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2003. V. 42. P. 493.
16. Prempraneerach P., Hover F.S., Triantafyllou M.S. // Pros. 13th Int. symp. unmanned untethered submersible techn. Durham, NH, Aug. 24–27, 2003. P. 137.
17. Romanenko E.V. Fish and dolphin swimming. Sofia–Moscow: Pensoft, 2002. 430 p.
18. Shuchi Yang, Shijun Luo, Feng Liu, Her-Mann Tsai // The AIAA 43rd Aerospace sciences meeting, Reno, NV, Jan. 10–13, 2005. P. 243.
19. Young J., Lai J.C.S., Kaya M., Tuncer I.H. // 3rd International conference on computational fluid dynamics (ICCFD3), Toronto, July 2004. P. 313.

Hydrodynamic Forces Exerted by Wing as a Function of the Pitch-Axes Location. Thrust, Power and Efficiency at Harmonic Changes in Angle of Attack

S. G. Pushkov¹, E. V. Romanenko², V. N. Lopatin²

¹Gromov Flight Research Institute, Moscow oblast, Russia

²Institute of Ecology and Evolution, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

The approximate expressions of hydrodynamic forces were used to construct a mathematical model of flat and rigid wing of different shape and aspect ratio at variable pitch-axes location and heaving and high pitching amplitudes. A specific feature of this model is the use of the first order aerodynamic derivative coefficients and kinematic parameters. The formulas were derived to calculate the thrust and efficiency when the wing angle of attack varies harmonically. The results of the calculations well agree with numerical solutions.